

陈庆益 编著

流形、分布

与拟微分算子



华中工学院出版社

流形、分布与拟微分算子

陈庆益 编著

华中工学院出版社

内 容 提 要

本书介绍近年来在数学多个分支及物理学、技术科学中应用十分广泛的流形、分布与拟微分算子。

书中有关局部凸空间的泛函分析及广义函数的乘法问题、除法问题，是国内及国际现有书籍中较少讨论的。

本书可作为高等学校高年级学生与研究生选修课教材及物理工作者与工程技术人员参考书。

流形、分布与拟微分算子

陈庆益 编著

责任编辑 李立鹏

华中工学院出版社出版

(武昌喻家山)

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社涪阳印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9.875 字数：24,500

1985年8月第1版、1985年8月第1次印刷

印数：1—2,000

统一书号：13255—032 定价：2.30元

序

编著者于1957年下半年及1963年至1965年曾多次讲授“局部凸空间与广义函数”课；1978年后，对原有讲义增加有关大范围分析及拟微分算子的内容，又多次为研究生讲授。本书就是在这个基础上写出的。

广义函数（包括Schwartz的分布）已在数学的多个分支及物理学、技术科学中得到广泛应用；考虑到近年来大范围分析（流形上的分析）及拟微分算子的重要性，所以本书把它们与分布理论结合起来加以介绍。事实上，流形上的分布已有所应用，而拟微分算子及Fourier积分算子则是分布理论的发展，三者之间是有所联系的。

本书只有三章。

第一章首先讲述拓扑空间，给出以后讨论所必要的准备知识；接着介绍拓扑线性空间特别是局部凸空间上的泛函分析，这方面的内容在国内现有书籍中还较少讨论；最后论述流形上有关微分运算的一些重要性质，例如没入、浸盖及贯截等，部分内容属于微分拓扑的范围。流形上的积分则放在第二章，以便引出流形上的分布定义。鉴于Stokes公式在两本译书（Spivak的《流形上的微积分》及Goffman的《多元微积分》）中已有详细论述，所以本书未作介绍。

第二章从理论性较强的局部凸空间的角度处理广义函数，以便深入揭示广义函数的本质。本章还专门讨论了广义函数的乘法问题及除法问题，这些在国际现有书籍中都是讨论得不多的，只散见于期刊文章中。

第三章从Euclid空间的Fourier积分算子（局部理论；区

别于流形上的Fourier 积分算子理论，所谓的全局理论）的角度介绍了拟微分算子。它是近年来用以讨论一般偏微分方程的有力工具，并在其它方面也得到应用。

编著者谨向罗学波同志表示谢意，他结合近几年的教学实践，写出了第三章的修订稿，在阐述和证明方面作了许多补充，使第三章更便于阅读。

陈庆益

1983年10月

目 录

1. 拓扑空间及流形	1	1.6. 定向流形	70
1.1. 一般拓扑	1	1.6.1. 外代数	70
1.1.1. 拓扑结构	1	1.6.2. 体元和行列式·定向性	74
1.1.2. 分离公理	5	1.6.3. 外微分型式	76
1.1.3. 连续映射	8	1.6.4. 可定向流形	82
1.1.4. 连通性与紧性	9	1.6.5. 交点与绕数	87
1.1.5. 其它拓扑概念	12	2. 广义函数	91
1.2. 拓扑向量空间	14	2.1. 对偶性	91
1.2.1. 一般性质	14	2.1.1. 强与弱拓扑	91
1.2.2. 局部凸空间	16	2.1.2. FM空间	96
1.2.3. F空间	19	2.1.3. 严格归纳极限	98
1.2.4. 有界集及M空间	24	2.2. 检试函数与广函	101
1.3. 线性映射	27	2.2.1. 一般性考察	101
1.3.1. 一般考察	27	2.2.2. 空间 $K\{M_k\}$ 及 $Z\{M_k\}$	107
1.3.2. 连续线性泛函	30	2.2.3. 广函的导数与结构	112
1.3.3. 线性及双线性映射	36	2.3. 分布理论	118
1.4. 可微流形	41	2.3.1. 空间D与分布	118
1.4.1. 范畴与函子	41	2.3.2. 分布的唯一确定	122
1.4.2. 导射与切射	45	2.3.3. 分布的卷积	127
1.4.3. 流形	49	2.3.4. 分布的Fourier变换	132
1.4.4. 没入与浸盖	52	2.4. 广函的乘法	138
1.5. 向量丛	56	2.4.1. 量子场论中的广函乘法	138
1.5.1. 定义	56	2.4.2. 结合性乘法的不存在性	144
1.5.2. 切丛	59	2.4.3. 复变函数方法	147
1.5.3. 贯截映射	62		
1.5.4. 张量丛	64		
1.5.5. Lie导数	68		

2.4.4. 正规列方法	156	3.3.3. $S^{m\rho, \delta}$ 中的渐近展式	234
2.5. 广函的除法	167	3.3.4. 用振幅表示适拟微分算子的特征	245
2.5.1. 一维情形	168	3.3.5. 拟微分算子的转置与合成	250
2.5.2. 以多项式相除	174	3.3.6. 经典拟微分算子	258
2.5.3. 以整函数相除	178	3.4. 变量代换与流形上的拟微分算子	257
2.6. 流形上的分布	188	3.4.1. 拟微分算子的变量代换	257
2.6.1. 定义	188	3.4.2. 特征的变换公式	262
2.6.2. 流形上的积分	190	3.4.3. 流形上的拟微分算子	268
2.6.3. 张量分布	194	3.5. 有界性定理	269
2.6.4. 流与密度	196	3.5.1. 基本有界性定理	269
3. 拟微分算子	199	3.5.2. 紧性定理	277
3.1. 振荡积分	201	3.5.3. Gårding不等式	282
3.1.1. 函数类 $S^{m\rho, \delta}$	201	3.6. 波锋集	286
3.1.2. 振荡积分及其正规化	204	3.6.1. 广区的波锋集	286
3.1.3. 由振荡积分定义的广函	208	3.6.2. 波锋集与拟微分算子	290
3.2. Fourier 积分算子	217	3.6.3. 广函的微局部化及乘积	299
3.2.1. 基本概念	218	3.6.4. 奇性传播	302
3.2.2. 奇点的变化	221		
3.2.3. 拟微分算子	224		
3.3. 拟微分算子代数	226		
3.3.1. 适拟微分算子	226		
3.3.2. 适拟微分算子的特征	231		

1. 拓扑空间及流形

可微流形理论在近代全局分析中起重要作用。本章的重点是介绍流形及向量丛，为此先提及一般拓扑的某些基本概念。本章的另一重点是局部凸空间及其上的泛函分析。

1.1 一般拓扑

1.1.1 拓扑结构

一定元素的集合 $E = \{x, y, \dots\}$ 称为**抽象空间**，而元素 x, y, \dots 则称为 E 中的点。

为了在 E 中建立极限、收敛、连续等分析概念，需引进拓扑结构。

定义1 若 E 中某子集类 \mathcal{O} 具下述性质（所谓**开集公理**）：

O_1 E 及空集 \emptyset 属于 \mathcal{O} ；

O_2 \mathcal{O} 中有限个集的交仍属于 \mathcal{O} ；

O_3 \mathcal{O} 中任意个集的并仍属于 \mathcal{O} ；

则称 \mathcal{O} 作成 E 的**拓扑结构**（简称**拓扑**） T ，称 E 为**拓扑空间**，记为 $E(T)$ ，或简记作 E ； \mathcal{O} 中集称为 E 的**开集**。开集 A 的余集（或补集） $CA \equiv E \setminus A$ 称为 E 的**闭集**。

可核验 E 中所有闭集类 \mathcal{F} 具性质（所谓**闭集公理**）：

F_1 E 及空集 \emptyset 属于 \mathcal{F} ；

F_2 \mathcal{F} 中任意个集的交仍属于 \mathcal{F} ；

F_3 . \mathcal{F} 中有限个集的并仍属于 \mathcal{F} .

E 上拓扑结构也可用具性质 $F_1 - F_3$ 的类 \mathcal{F} 定义; 这时 E 中开集则定义为 \mathcal{F} 中集(闭集)的余集.

对同一抽象空间 E 可引进多种拓扑, 作为两种极端情形, 可取 E 及空集构成开集类 \mathcal{O} , 或取 E 的所有子集(包括空集及 E)构成开集类 \mathcal{O} . 容易看出, 开集公理在这两种情形都成立. 这时相应的拓扑结构分别称为**平凡拓扑**及**离散拓扑**.

定义2 E 上二拓扑 T_1 及 T_2 若有如下关系: T_1 开集类 \mathcal{O}_1 包含 T_2 开集类 \mathcal{O}_2 , 即 \mathcal{O}_2 中子集都是 \mathcal{O}_1 中子集, 则称 T_1 细于(或强于) T_2 , T_2 粗于(或弱于) T_1 ; 若 T_1 同时细于及粗于 T_2 , 则称 T_1 及 T_2 为**等价的或重合的拓扑**.

据定义2知: E 上最强拓扑为离散拓扑, 最弱拓扑为平凡拓扑. 可注意, E 上任二拓扑不一定能比较强弱.

定义3 若拓扑空间 $E(T)$ 的集 U 以含某点 $x \in E$ 的开集为子集, 即称 U 为点 x 的 **T 邻域**, 或简称**邻域**.

若记点 x 的所有邻域组成的集合为 $v(x)$, 不难核验它具备如下性质(所谓**邻域公理**):

V_1 $v(x)$ 不是空集, 且 x 含于 $v(x)$ 的每个集;

V_2 含 $v(x)$ 中某个集的每个集, 属于 $v(x)$;

V_3 $v(x)$ 中有限个集的交, 仍属于 $v(x)$;

V_4 对每个 $U \in v(x)$, 存在 $V \in v(x)$, 使对每一点 $y \in V$, 有 $U \in v(y)$.

可注意, 每一含于 U 的开邻域 V , 都具有性质 V_4 .

E 上拓扑也可由 E 中所有点的邻域类的全体确定. 事实上, 设对 E 中每一点 x 已给定满足邻域公理的非空子集类 $v(x)$, 于是可定义开集 O 为具备如下性质的集:

$$x \in O \Rightarrow O \in v(x). \quad (1)$$

这样的子集类添加空集作成子集类 \mathcal{O} ，容易核验 \mathcal{O} 满足开集公理，故作成的是一种拓扑结构 T ，但还须证明，由这个拓扑 T 产生的新邻域类重合于原邻域类 $\{v(x); x \in E\}$ 。首先，由定义3知， x 的每个 T 邻域含一开集 O ，且 $O \in v(x)$ 。故由性质 V_2 知， x 的每个 T 邻域属于 $v(x)$ 。反过来，对给定的 $U \in v(x)$ ，作集 $U_1 = \{y; U \in v(y)\}$ 。因 $x \in U_1$ ，只需证 $U_1 \in \mathcal{O}$ 。据性质 V_1 知，对点 y 存在 $V \in v(y)$ ，使对所有 $z \in V$ ，恒有 $U \in v(z)$ 。由 U_1 的定义知 $z \in U_1$ ，于是 $V \subset U_1$ ，而据性质 V_2 知 $U_1 \in v(y)$ 。这表明 U_1 具性质(1)：由 $y \in U_1$ ，恒有 $U_1 \in v(y)$ 。故 $U_1 \in \mathcal{O}$ 。注意到 $U_1 \subset U$ ，即知 U 也是 T 邻域。因此，两种邻域类重合一致。

以后常会讨论拓扑空间的子空间，因此需讲到拓扑的相对化原则。

设 S 为 $E(T)$ 的子集。把 E 中开集类 $\mathcal{O} = \{O\}$ 相对化，而取 $\{S \cap O$ 作为 S 中的开集类，可得拓扑 T 在 S 上的导拓扑或相对拓扑。同样，可由 E 中闭集类或邻域类进行相对化，引出 S 上的导拓扑，但须注意， S 中开集或闭集不必是 E 中开集或闭集。

不难看出，对 S 中子集 Q ，由 S 引出的导拓扑，与直接由 Q 引出的导拓扑，是重合一致的。

若 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ， $E_j \subset E_{j+1}$ ， $j = 1, 2, \dots$ ，且每个 E_j 的拓扑恰为由 E_{j+1} 引出的导拓扑，则称 E 为拓扑空间列 $\{E_j\}$ 的严格归纳极限。当且仅当 $U \cap E_j$ 为 E_j 中零元邻域时， U 为 E 中零元邻域。

下面引进点列的收敛性及极限点概念。

定义4 若拓扑空间 $E(T)$ 中点列 $\{x_n\}$ ，存在点 $y \in E$ 具

性质：对 y 的任一邻域 U ，有相应的正数 N ，使当 $n \geq N$ 时，总有 $x_n \in U$ ，则称点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 y （关于拓扑 T ），或称 y 为此点列的一个极限点。

若考虑一点 x 的所有邻域，不免过于庞杂，因此须挑出一些基本的邻域。这就引出如下的定义。

定义5 拓扑空间 E 在点 x 的所有邻域类 $\mathcal{V}(x)$ 的子类 $\mathcal{u}(x)$ 中，若使 $\mathcal{V}(x)$ 中每一邻域必含 $\mathcal{u}(x)$ 中一邻域，则 $\mathcal{u}(x)$ 称为 x 的邻域基。 E 中所有点的邻域基的全体 $\mathcal{u} = \{\mathcal{u}(x); x \in E\}$ 称为 E 的邻域基或基本邻域系。

于是可提到如下的可列公理。

第一可列公理 E 中每点有可列的邻域基，即 x 的邻域基由可列个邻域组成。

可注意，在具第一可列性的空间，收敛性可用序列表述：从可列个邻域可选出点列。

第二可列公理 E 本身有可列的邻域基。

例如， n 维 Euclid 空间 R^n 满足第二可列公理：以有理点为心、 $\frac{1}{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) 为半径的开球列，就组成 R^n 的可列的邻域基。

特别，对由开集组成的邻域基 $\mathcal{u}(x)$ ，据邻域公理 $V_1 - V_4$ 及上面的讨论，可核验下面的Hausdorff公理成立：

H_1 每点 x 至少有一邻域属于 $\mathcal{u}(x)$ ，且 x 含于 $\mathcal{u}(x)$ 的每个元中，

H_2 $\mathcal{u}(x)$ 中二元的交含有 $\mathcal{u}(x)$ 中某元，

H_3 若点 y 含于 $V \in \mathcal{u}(x)$ ，则有 $W \in \mathcal{u}(y)$ ，使 $W \subset V$ 。

反过来，由具性质 $H_1 - H_3$ 的邻域基 \mathcal{u} 也可确定 E 上拓扑结构，这时只需对 \mathcal{u} 添加 E 中较大子集，使作成具性质 $V_1 - V_4$ 。

的邻域类即可。

若二邻域基 u 及 u' 确定 E 上等价拓扑,即称为等价邻域基。
由这个定义容易推出经常用到的——

Hausdorff准则 E 上二邻域基 u 及 u' 等价的充要条件是:
 E 中任一点 x 在 u 中的每个邻域,含 x 在 u' 中的某个邻域;且反之亦然。

1.1.2 分离公理

为了使拓扑空间 E 中的收敛性有较确定的意义,同时也为了使 E 中闭集具体化,还须在 E 中引进不同程度的分离公理。

T_0 公理 E 中任二不同点中,至少有一点有不含另一点的邻域。

满足 T_0 公理的拓扑空间称为 T_0 空间。

T_1 公理 E 中任二不同点,各有不含另一点的邻域。

满足 T_1 公理的拓扑空间称为 T_1 空间。

T_2 公理 E 中任二不同点有不相交的邻域。

满足 T_2 公理的拓扑空间称为 T_2 空间或分离空间也称为Hausdorff空间。

T_3 公理 E 中任一点 x 及不含 x 的任一闭集 F ,有不相交的邻域(任一集 M 的邻域定义为以含 M 的某开集为子集的集)。

满足 T_3 公理的拓扑空间称为 T_3 空间;若 T_3 空间还满足 T_1 公理,即称为正则空间。

T_4 公理 E 中任二不相交闭集有不相交的邻域。

满足 T_4 公理的拓扑空间称为 T_4 空间;若 T_4 空间还满足 T_1 公理,即称为规范空间。

注1 有些书分别称满足 T_3 或 T_4 公理的空间为正则空间或规范空间;若还满足 T_1 公理,即分别称为 T_3 空间或 T_4 空

间；而与这里的定义恰恰相反。这当然没有什么原则性的区别。本书认为：称满足 T_1 公理的空间为 T_1 空间，是更为合理的；事实上，也有一些书是这样命名的。

现在阐明 T_1 公理的意义。

定理1 拓扑空间 E 中单点集为闭集的充要条件是： E 为 T_1 空间。

证 充分性 设 E 为 T_1 空间。对 E 中任一点 P ，记其余集为 U ； $U = E \setminus \{P\}$ 。据 T_1 公理，对 U 中每点 Q ，存在开集 $V(Q)$ ，使 $P \notin V(Q)$ ，故 $V(Q) \subset U$ 。于是 $U = \bigcup_{Q \in U} V(Q)$ 为 E 中开集，随之单点集 $\{P\} = E \setminus U$ 为闭集。

必要性 若 E 中单点集都是闭集，则对 E 中任二不同点 P 及 Q ，记 $V_1 = E \setminus \{Q\}$ ， $V_2 = E \setminus \{P\}$ 。即 V_1 及 V_2 分别是 $\{Q\}$ 及 $\{P\}$ 的余集，则 V_1 及 V_2 都是开集，且 V_1 是点 P 的邻域，而不含 Q ； V_2 是点 Q 的邻域，而不含 P 。故 T_1 公理得到满足，于是 E 必为 T_1 空间。

为了阐明上述诸分离公理的意义及区别，下面举几个虽属人为但极有启发性的例子。

例1 设 E 仅由二点组成。定义 E 中开集类 \mathcal{O} 仅含空集及 E 。显然，这个拓扑空间不满足任一分离公理。

例2 连通双点空间 E 由二点 a, b 及如下拓扑所确定： $\mathcal{O} = \{\emptyset, a, E\}$ 。这个子集类 \mathcal{O} 显然满足开集公理。容易看出， E 为 T_0 空间，但非 T_1 空间。

例3 取线段 $0 \leq x \leq 1$ 及其通常拓扑（即数轴上通常开集类确定的拓扑），再添加点 $\xi > 1$ ，而以任一由 ξ 及 $[0, 1]$ 除去有限个点组成的集作为 ξ 的邻域。可核验邻域公理 $V_1 - V_2$ 成立，且所得拓扑空间为 T_1 空间，但非 T_2 空间。

关于 T_2 空间而非 T_3 空间或正则空间，以及正则空间而非

规范空间等情况的例子。可参看有关一般拓扑的书。

为了说明 T_2 空间的重要意义，先作如下的考察。

设 M 为拓扑空间 E 的某子集。若点 $x \in E$ 的每个邻域至少含 M 中一点，即称 x 为 M 的触点。 M 的触点的全体称为 M 的闭包，记作 \overline{M} 。容易核验闭包具性质(闭包公理)：

$$\overline{H_1} \quad \overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N},$$

$$\overline{H_2} \quad M \subseteq \overline{M},$$

$$\overline{H_3} \quad \overline{\overline{M}} = \overline{M},$$

$$\overline{H_4} \quad \overline{\emptyset} = \emptyset.$$

易知当且仅当 $A = \overline{A}$ 时，集 A 为闭集。

若点 $x \in E$ 的每个邻域至少包含 M 中不同于 x 的一个点，则称 x 为 M 的聚点。不难看出：当且仅当 x 为 M 的孤立点(即： x 有一邻域，除 x 外不含 M 中其它的点)时，触点不为聚点。故集 M 为闭集的充要条件是： M 包含它的所有聚点。

若点 x 随其某邻域含于 M ，即称 x 为 M 的内点； M 的内点之全体称为 M 的内部，记作 $\text{Int} M$ 或 $\overset{\circ}{M}$ 。

集 M 的边界 ∂M 定义为 $\overline{M} \cap \overline{CM}$ ，其中点称为 M 的边界点。每个闭集含其边界；每个开集不含边界点。

若 $M \subset \overline{N}$ ，称集 N 在 M 中稠；若 $\overline{N} = E$ ，称 N 为处处稠集；若 $\text{Int } \overline{N} = \emptyset$ ，称 N 为疏集。可列个疏集的并称为第一纲集；非第一纲集称为第二纲集。

若 E 中有可列的处处稠集，即称 E 为可分空间。

现在揭示 T_2 空间的一个性质。

定理2 T_2 空间任一点的所有闭邻域的交仅含此点。

证 设 x_0 给定, y 为不同于 x_0 的任一点. 据 T_2 公理知有邻域 $U(x_0), V(y)$, 使 $U \cap V = \emptyset$, 故 y 不为 U 的聚点, 随之不含于 \bar{U} , 故定理的断定是正确的.

由定理2特别得知 T_2 空间的单点集也是闭集. 故对 T_2 空间不必附加 T_1 公理; 而对 T_3 或 T_4 空间, 则有此必要.

据上所述, 知 T_2 空间的闭集、开集, 与 R^n 中的点集论更为接近.

推论1 有限集上唯一的 T_2 拓扑 (即具 T_2 公理的拓扑结构) 是离散拓扑.

1.1.3 连续映射

设 A 是由拓扑空间 E_1 到 E_2 的映射, 对每点 $x \in E_1$, 有点 $Ax \in E_2$ 与之相对应. 有时也称 A 为以 E_1 作定义域而值域属于 E_2 的抽象函数. 映射也称为变换或算子, 映射 A 也作成 E_1 中子集 S 到 E_2 的映射, 而称为 A 在 S 上的缩射, 记作 $A|_S$, 也简记作 A . 同样, A 还作成 E_1 中子集类到 E_2 中子集类的映射, 仍记作 A ; 这时称 $AM \subset E_2$ 为 $M \subset E_1$ 的象集或象, M 则称为 AM 的原象, 特别, AE_1 称为 E_1 在映射 A 下的象空间或值域.

E_1 到 E_2 中的一对一映射, 称为单射或内射; E_1 到 E_2 上的映射, 称为满射或盖射; 内射而兼盖射, 称为双射.

若 A 为内射, 记 $y = Ax$, 则由对应 $x = A^{-1}y$ 得 AE_1 到 E_1 上的映射 A^{-1} , 称为 A 的逆映射, 或简称为 A 的逆. 若 A 不是内射, 则不存在点与点间的逆映射, 但可取 AE_1 中每个子集 N 的原象 $A^{-1}N$ 与 N 对应, 这里 $A^{-1}N = \{x; Ax \in N, x \in E_1\}$. 故对任一映射 A , 可定义 A^{-1} 为由 AE_1 中子集类到 E_1 中子集类的映射. 若 N 为 E_2 中任一子集, 只要 $AE_1 \cap N \neq \emptyset$, 可理解 $A^{-1}N = A^{-1}(N \cap AE_1)$.

定义6 若 A 映 E_1 中开集为 E_2 中开集, 即称 A 为**开映射**; 闭映射可类似地定义. 对 A^{-1} 也可引进同样定义.

映射 A 若在点 $x_0 \in E_1$ 具性质: 对 Ax_0 的每个邻域 $V \subset E_2$, 存在 x_0 的相应邻域 $U \subset E_1$, 使得 $AU \subset V$, 即称映射 A 在点 x_0 连续. 若 A 在 E_1 中所有的点连续, 则称 A 在 E_1 上为**连续映射**, 或简称 A 为**连续映射**.

现在可叙述一个基本定理.

定理3 E_1 到 E_2 的映射 A 的下列性质是等价的:

- 1) A 为连续映射;
- 2) A^{-1} 为开映射;
- 3) A^{-1} 为闭映射.

证 若 A^{-1} 为开映射, 则对 Ax_0 的每个开邻域 V , 得 x_0 的开邻域 $U = A^{-1}V$, 使 $AU \subset V$, 故 A 在 x_0 连续. 因 x_0 为 E_1 中任一点, 故 A 在 E_1 上连续.

反之, 若 A 连续且 M 为 AE_1 中开集, 则对 $Ax_0 \in M$, 存在 Ax_0 的邻域 $V \subset M$. 由连续性知存在 x_0 的邻域 $U \subset A^{-1}M$, 故 x_0 为 $A^{-1}M$ 的内点. 但 x_0 可取为 $A^{-1}M$ 中任一点, 故 $A^{-1}M$ 为 E_1 中开集, 随之 A^{-1} 为开映射.

最后, 因 A^{-1} 把 $AE_1 \setminus M$ 映为 $E_1 \setminus A^{-1}M$, 故 A^{-1} 当且仅当它为闭映射时为开映射. 定理证毕.

注意当连续映射 A 为内射时, A^{-1} 不必连续. 若连续映射 A 的逆 A^{-1} 也连续, 即称 A 为**同胚映射**或简称**同胚**; 这时空间 E_1 及 AE_1 称为**同胚的**.

1.1.4 连通性与紧性

拓扑空间 E 若不为二非空的不相交开集的并, 即称为**连通空间**. 等价的定义是: E 不为二非空的不相交闭集的并, 或 E

不含同时为开及闭的真子集。

E 的子集 S 若在导拓扑下为连通空间，即称为 E 的**连通子集**。若 E 中任二点都属于同一连通子集，则 E 为连通空间。

E 的非空连通子集 S 若具性质：含 S 的唯一连通集是 S 本身，则称 S 为 E 的一个**分集**。

若 E 的每一点都有一个连通邻域，即称 E 为**局部连通的**。可核验，局部连通空间在开连续映射下的象集也是局部连通的。在局部连通空间，各个分集同时为开及闭的。

定理4 设 E 为连通空间， f 为由 E 到实数域 R 中的连续函数，则 f 取到任二不同值 $f(x)$ 及 $f(y)$ 间的每个值。

证 不妨设 $f(x) < f(y)$ 。若 f 不取值 $a \in (f(x), f(y))$ ，记 $U = \{x_0; f(x_0) < a\}$ ， $V = \{y_0; f(y_0) > a\}$ ，则 E 至少有两个不相交的分集 U 及 V ，而与 E 的连通性假定不符。故定理真。

设 $c(t)$ 为由 $[0, 1]$ 到拓扑空间 E 的连续映射。若 $c(0) = c(1) = x \in E$ ，则称 $c(t)$ 为 E 中过点 x 的**圈**。若存在连续映射 $H(t, \tau)$ ， $0 \leq t, \tau \leq 1$ ，使对所有的 $t \in [0, 1]$ ，有 $H(t, 0) = c(t)$ ， $H(t, 1) = x$ ，则称圈 $c(t)$ 为**可缩的**。若拓扑空间 E 中过任一点的任一个圈都是可缩的，则称 E 为**单连通空间**。

连通性是拓扑空间的同胚不变性质，即在同胚映射下，连通性不被破坏。拓扑空间的另一重要同胚不变性质是紧性。

拓扑空间 E 中的开集族 $\{U_\alpha\}$ ，若具性质： $\bigcup_\alpha U_\alpha = E$ ，即称为 E 的一个**开覆盖(族)**。若对 E 的每个开覆盖可选出有限的

子覆盖 $\sum_{j=1}^N U_{\alpha_j} = E$ ，则称 E 为**紧空间**。 E 的子集 S 若在导拓

扑下为紧空间，即称为 E 的**紧子集**；若 S 有紧的闭包，则称 S

为相对紧集。若 E 中每点有邻域，其闭包为紧集，则称 E 为局部紧的。若 E 中每个点列有收敛于 E 中一点的子列，则称 E 为列紧的。

紧空间必为局部紧的，反之则不然。例如 R^n 为局部紧的，而非紧空间。

若对每个 U_α ，存在 V_β ，使 $U_\alpha \subset V_\beta$ ，则 E 的覆盖 $\{U_\alpha\}$ 称为覆盖 $\{V_\beta\}$ 的加细。若 E 中每点 x 有邻域 U ，只与有限个 U_α 相交，则 E 的覆盖 $\{U_\alpha\}$ 称为局部有限的。若 E 的每个开覆盖有局部有限的加细开覆盖，则称 E 为次紧的。

定理5 设 E 为具第一可列性的紧空间，则 E 中任一点列 $\{x_n\}$ 有收敛的子列。

证 用反证法。可设所有的 x_n 各不相同。因列 $\{x_n\}$ 无收敛的子列，则每点 x_n 有邻域 U_n ，不含其它点 x_m ， $m \neq n$ 。因 E 满足第一可列公理，收敛性可用序列收敛性表述。但因 $\{x_n\}$ 无收敛子列，故 $\{x_n\}$ 除每点 x_n 外，无其它触点，即 $\overline{\{x_n\}} = \{x_n\}$ ，这表明 $\{x_n\}$ 为闭集。于是得 E 的开覆盖 $\{U_n\}$ 及 $C\{x_n\}$ ，而无有限的子覆盖。这与紧性假定不符，故定理成立。

定理6 T_2 空间 E 的每个紧集 S 为闭集。

证 设 $x \in CS$ ， $y \in S$ ，则 x, y 有不相交的邻域。因 S 为紧集， x 与 S 有不相交的邻域。事实上， S 可由有限个开集所覆盖，而据定理2， x 的所有闭邻域的交只含点 x ，故 x 有邻域，不与覆盖 S 的有限个开集相交。这表明 x 有邻域属于 CS ，而为 CS 的内点。但因 x 为 CS 中任一点，故 CS 为开集，随之其余集 S 为闭集。

定义7 若局部紧空间 E 为可列个紧集的并，即称 E 在无限远处为可列的。

注2 次紧空间必为规范空间。局部紧空间为次紧空间的

充要条件是：它是在无限远处可列的局部紧空间族的并（见 Bourbaki, *Topologie Générale Chap. I*, §10.12, Theorem 5, Act. Sci. et Ind No. 1144, Paris(1947)）.

1.1.5 其它拓扑概念

设给定集 E_1, \dots, E_n . 用 E 记所有 n 重点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ 的集, 其中 $x_j \in E_j$, $j = 1, \dots, n$, 或记 $E = \prod_{j=1}^n E_j$, 而称为集 E_j 的集积或 Descartes 积. 若 E_j 都是拓扑空间, 则 E 也是拓扑空间, 而以 $U(x) = \prod_{j=1}^n U_j(x_j)$ 作为点 x 的邻域基, 这里 $U_j(x_j)$ 是点 x_j 在 E_j 中的任一邻域. 这时称 E 为 E_1, \dots, E_n 的拓扑积, 仍记为 $E = \prod_{j=1}^n E_j$. 上述定义也可用于任意个因子的情形: 若给定指标集 $A = \{\alpha\}$ 及集族 $\{E_\alpha\}$, 记 $E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ 为所有的点 $x = (x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots)$ 的集, 其中 $x_\alpha \in E_\alpha$, 仍称为 $\{E_\alpha\}$ 的集积. 若 E_α 都是拓扑空间, 则称 E 为 $\{E_\alpha\}$ 的拓扑积, 而以 $U = \prod_\alpha U_\alpha(x_\alpha)$ 作为 x 的邻域基, 这里 $U_\alpha(x_\alpha)$ 是 x_α 在 E_α 中的任一邻域, 且除有限个 α 外, $U_\alpha = E_\alpha$. 若所有的 $E_\alpha = E_1$, 则其拓扑积可记为 E^A ; 特别当指标集 $A = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, 记为 E_1^n ; 当 $A = \{1, 2, \dots\}$ 时, 记为 E_1^ω . 例如当 E_1 为实数域 R 时, R^n 为 n 维 Euclid 空间; R^ω 为所有实数列的空间; 当 $E_1 = [0, 1]$ 时, 拓扑积 E^A 记为 I^A , 称为 Hilbert 平行体.

由 $E = \prod_\alpha E_\alpha$ 的点 x 到点 $x_\alpha \in E_\alpha$ 的映射 P_α , 称为 E 到 E_α 上的投影, 而为连续映射. 可注意, E 上拓扑是使所有 P_α 连续的最弱拓扑, 事实上, 因 P_α 连续, 故开邻域 $U_\alpha(x_\alpha)$ 的原象 $\prod_\alpha U_\alpha(x_\alpha)$ 为开集, 因而为 x 在 E 中的邻域. 因有限个开集的交才是开

集, 故除有限个 α 外, 取其余所有 $U_\alpha = E_\alpha$. 于是由上述原象通过有限的交运算, 可得 E 中给定邻域基的所有邻域. 若换 E 中拓扑为更弱拓扑时, P_α 就不再是连续映射.

若 f 为拓扑积 $E_1 \times E_2$ 到拓扑空间 F 的映射, 且在点 (x_1^0, x_2^0) 连续, 则由 E_1 到 F 的映射 $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2^0)$ 在点 x_1^0 连续; 同样, 映射 $x_2 \rightarrow f(x_1^0, x_2)$ 在点 x_2^0 连续. 这是所谓的部分连续性; f 对 x_1 及 x_2 的同时部分连续, 称为分别连续性. 相对于这种部分或分别连续性, 对 (x_1^0, x_2^0) 的连续性可称为整体连续性. 在多因子的拓扑积中, 类似的定义是显然的. 容易看出, 由整体连续性可推出部分连续性; 反之不必然.

最后考虑商空间. 设在集 S 上给定双元关系 \sim , 使对所有的点 $x, y, z \in S$ 有:

- 1) 反射性 $x \sim x$;
- 2) 对称性 若 $x \sim y$, 则 $y \sim x$;
- 3) 传递性 若 $x \sim y, y \sim z$, 则 $x \sim z$;

即称 \sim 为等价关系. 定义 x 的等价类 $[x]$ 为:

$$[x] = \{y; y \sim x, y \in S\}.$$

所有等价类的集, 记作 S/\sim , 称为 S 关于等价关系 \sim 的商集, 而映射

$$\pi: S \rightarrow S/\sim; x \rightarrow [x],$$

则称为典则投影. 易知 S 是所有等价类的并. 设 E 为拓扑空间, \sim 为其中某等价关系, 则 E/\sim 上由开集类

$$\{U; U \subset E/\sim, \pi^{-1}(U) \text{ 为 } E \text{ 中开集}\}$$

构成的拓扑, 称为商拓扑; E/\sim 称为商空间. 反之, 由 E/\sim 上拓扑也可引进 E 上拓扑:

$$\{O; O = \pi^{-1}(U), U \text{ 为 } E/\sim \text{ 中开集}\}.$$

例4 考虑 R^2 中等价关系 \sim :

$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$, 当且仅当 $a_i - b_i \in \mathbf{Z}$ ($i = 1, 2$) 时, 这里 \mathbf{Z} 为整数集. 容易核验它确满足要求 1) — 3). 记 $T^2 \equiv R^2 / \sim$, 而称为环面.

可类似地定义 n 维环面 T^n .

关于一般拓扑, 进一步可参看

L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexample in Topology*, Springer-Verlag, Berlin (1970) 及陈昌平等译, 一般拓扑学, 1982, 华东师范大学出版社.

1.2 拓扑向量空间

1.2.1 一般性质

设 K 为任一具零元及单元的域, 例如实数域 R^1 及复数域 C^1 . K 上的向量空间或线性空间 E 为具如下线性结构的集:

L_1 对任二点 $x, y \in E$, 定义有 $x + y \in E$, 且 E 关于运算 $+$ 作成可换群;

L_2 对每个 $a \in K$ 及 $x \in E$, 定义有 $ax \in E$, 且对任二元 $a, b \in K$ 及 $x, y \in E$, 有

$$(ab)x = a(bx); \quad a(x + y) = ax + ay; \quad (a + b)x = ax + bx.$$

显然, 线性空间有零元, 记作 0 , 而具性质: $x + 0 = 0$, $a \cdot 0 = 0$.

若在 E 上还定义有分离的并与线性结构相容的拓扑 T 时, 即称 E 为拓扑向量空间或拓扑线性空间. 所谓拓扑结构 T 与线性结构相容, 乃指映射

$$(x, y) \rightarrow x + y, \quad (a, x) \rightarrow ax$$

关于拓扑 T 为连续映射.

由两种结构的相容性知，映射 $x \rightarrow x + x_0$ 及 $x \rightarrow ax (a \neq 0)$ 都是 E 到 E 的同胚映射。故若 $u = \{U\}$ 是 E 中零元的邻域基，则 E 中任一点 x 的邻域基是 $\{x + U\}$ 。因此，对于线性空间，只需对零元引进相容的拓扑，便可得到拓扑线性空间。

以后取 K 为实或复数域。

定理1 设 $E(T)$ 是域 K 上的拓扑线性空间， $u = \{U\}$ 为 E 中零元的邻域基，则有：

TL_1 对每个 $U \in u$ ，有 $V \in u$ ，使 $V + V \subset U$ ，这里 $V + V = \{x + y; \forall x, y \in V\}$ ；

TL_2 对每个 $U \in u$ ，有 $V \in u$ ，使当 $|a| \leq 1$ 时， $aV \subset U$ ；

TL_3 对每个 $U \in u$ 及 $x \in E$ ，有自然数 $n_0 = n_0(x, U)$ ，使当 $n \geq n_0$ 时， $x \in nU$ 。

证 TL_1 表明映射 $(x, y) \rightarrow x + y$ 在点 $(0, 0)$ 的连续性。由 ax 在 $(0, 0)$ 的连续性知，对 $\varepsilon > 0$ ，有 $W \in u$ ，使对所有的 $x \in W$ 及 $|a| \leq \varepsilon$ ，有 $ax \in U$ ，故 TL_2 当取 $V = \varepsilon W$ 时成立。最后，若 TL_3 不成立，则存在 $x_0 \in E$ ，不含于任一个 nU ，于是 $\frac{1}{n}x_0 \notin$

U ，而与乘积运算 ax 的连续性要求不符。定理证毕。

定义1 E 中集 M 若具性质：对任一点 $x \in E$ ，存在 $\rho_0 = \rho_0(x)$ ，使当 $\rho \geq \rho_0$ 时， $x \in \rho M$ ，即称 M 为吞吸集。集 M 若具性质：对每点 $x \in M$ ，当 $|a| \leq 1$ 时，总有 $ax \in M$ ，即称 M 为心实称集。集 $\hat{M} = \{ax; |a| \leq 1, x \in M\}$ 称为 M 的心实称包。

推论1 每个拓扑向量空间总有由心实称的吞吸集组成的零元邻域基。

事实上， TL_3 表明零元邻域为吞吸集，而由 TL_2 知 $\bigcup_{0 < |a| \leq 1} aU (U \in u)$ 为心实称的。

定理2 设线性空间 E 有子集类 $\mathfrak{u} = \{U\}$, 具性质 TL_1 — TL_3 及 1.1.1 性质 H_1 — H_2 , 且 $\bigcap U = \{0\}$, 则由邻域基

$$\{U(x) = x + \alpha U; U \in \mathfrak{u}, 0 \neq \alpha \in K\}$$

可确定拓扑 T , 使 E 成为拓扑线性空间.

证 在 E 中定义开集为对其中每点 x 含其一邻域 $U(x) = x + \alpha L$ 的集, 添上空集, 作成类 \mathcal{O} . 易核验 \mathcal{O} 满足开集公理的要求, 故得拓扑 T . 为核验 T_2 公理, 对 E 中任二不同点 x 及 y , 因 $\bigcap U = \{0\}$, 知有 $U \in \mathfrak{u}$, 使 $x - y \notin U$. 取 V 为心实称集, 使 $V + V \subset U$, 则 $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$. 因若不然, 则有 $z_1, z_2 \in V$, 使 $x + z_1 = y + z_2$, 随之 $x - y = z_2 - z_1 \in V + (-V) = V + V \subset U$, 而得矛盾. 映射 $(x, y) \rightarrow x + y$ 在点 (x_0, y_0) 的连续性由 $(x_0 + V) + (y_0 + V) \subset x_0 + y_0 + U$ 推出; 映射 $(a, x) \rightarrow ax$ 在点 (a_0, x_0) 的连续性可如下核验: 取心实称邻域 $U \in \mathfrak{u}$, 作 $a_0 x_0 + U$, 设 $|a_0| \leq m$, 作心实称集 V , 使 $mV + V + V \subset U$. 据 TL_3 , 存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $x_0 \in nV$. 若 $|a - a_0| \leq \frac{1}{n}$,

$x \in x_0 + V$, 则由

$$ax = a_0 x_0 + (a - a_0)x_0 + (a - a_0)(x - x_0) + a_0(x - x_0),$$

$$\frac{1}{n}(nV) = V, \quad (a - a_0)(x - x_0) \in \frac{1}{n}V \subset V$$

以及 $a_0(x - x_0) \in mV$ 有

$$ax \in a_0 x_0 + V + V + mV \subset a_0 x_0 + U,$$

于是定理得证.

1.2.2 局部凸空间

下面引进一类重要的拓扑线性空间.

定义2 拓扑线性空间 E 若有由凸集组成的零元邻域基,

即称为局部凸空间；相应拓扑结构称为局部凸拓扑。

回忆凸集的定义：若由 $x, y \in M$, $a, b \geq 0$, $a + b = 1$, 恒有 $ax + by \in M$, 则称 M 为凸集。若不限定 a, b 为非负数, 甚至容许为复数, 则当 $|a| + |b| = 1$ 时, 对 $x, y \in M$, 总使 $ax + by \in M$, 即称 M 为绝对凸集。对任何集 $N \in E$, 含 N 的所有凸集的交称为 N 的凸包, 记作 $C(N)$ 。可类似地定义 N 的绝对凸包。

易知任一零元邻域 U_α 总含有绝对凸的零元邻域。故由推论 1 知, 局部凸空间有由绝对凸集组成的零元邻域基。

定理 3 设在线性空间 E 中存在具 1.1.1 性质 $H_1 - H_2$ 的吞吸的绝对凸集类 $\mathfrak{u} = \{U_\alpha\}$, $\bigcap_\alpha U_\alpha = \{0\}$, 且对 $\rho > 0$ 有 $\rho U_\alpha \in \mathfrak{u}$, 则以 \mathfrak{u} 为零元邻域基, 可得局部凸空间 $E(T)$; 且每个局部凸空间可如此得到。

这是定理 2 的直接推论。因由绝对凸性有

$$\frac{1}{2} U_\alpha + \frac{1}{2} U_\alpha \subset U_\alpha,$$

故取 $V = \frac{1}{2} U_\alpha$, 即知 TL_1 成立。其它更易核验。据定理 2 后的

讨论, 知每个局部凸空间确可如此得到。

实际应用时, 常借所谓半范列来定义局部凸空间。

定义 3 线性空间 E 上的实函数 $p(x)$ 若具性质:

$$N_1 \quad p(x) \geq 0, \quad p(0) = 0, \quad x \in E;$$

$$N_2 \quad p(ax) = |a| p(x), \quad x \in E, \quad a \in K;$$

$$N_3 \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad x, y \in E,$$

即称为 E 上半范。若还具性质:

$$N_4 \quad p(x) = 0 \iff x = 0,$$

则称 $p(x)$ 为范, 记作 $\|x\| = p(x)$ 。

通常称 N_3 为三角不等式(关于半范的)。

设在线性空间 E 中给定绝对凸吞吸集 C , 定义函数

$$p(x) = \inf_{x \in \rho C} \rho, \quad (1)$$

容易核验 $p(x)$ 为半范. 事实上, 由 C 的吞吸性知 $p(x)$ 对所有的 $x \in E$ 有定义, 且性质 N_1 是显然的. 为核验 N_2 , 注意

$$p(ax) = \inf_{ax \in \rho C} \rho = |a| \inf_{x \in \frac{\rho}{|a|} C} \left| \frac{\rho}{|a|} \right| = |a| \inf_{x \in \lambda C} \lambda = |a| p(x).$$

为核验 N_3 , 记 $p(x) = \rho_0$, $p(y) = \sigma_0$, 则当 $\rho > \rho_0$, $\sigma > \sigma_0$ 时, $\frac{x}{\rho}$ 及 $\frac{y}{\sigma}$ 都属 C . 由 C 的凸性知

$$\frac{\rho}{\rho + \sigma} \cdot \frac{x}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho + \sigma} \cdot \frac{y}{\sigma} = \frac{x + y}{\rho + \sigma} \in C,$$

故 $x + y \in (\rho + \sigma)C$. 由 ρ 及 σ 的任意性知有

$$p(x + y) \leq \rho_0 + \sigma_0 = p(x) + p(y).$$

反之, 由给定半范 $p(x)$, 也可得绝对凸吞吸集

$$C = \{x: p(x) < 1, x \in E\}. \quad (2)$$

事实上, 吞吸性由 N_2 保证: 对 E 中任一点 y , 记 $p(y) = \rho_0$, 取 $\rho = \rho_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 且充分小, 则有 $p\left(\frac{y}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho} p(y) < 1$, 故 $\frac{y}{\rho} \in$

C , 或 $y \in \rho C$, $\forall \rho > \rho_0$. 这表明 C 为吞吸集. C 的绝对凸性更易核验: 对 C 中任二点 x, y 及任二数 $a, b \in K$, 只要 $|a| + |b| = 1$, 据 N_1 及 N_2 有

$$\begin{aligned} p(ax + by) &\leq p(ax) + p(by) \\ &= |a| p(x) + |b| p(y) < |a| + |b| = 1. \end{aligned}$$

这表明 $ax + by \in C$. 故 C 为绝对凸的.

可注意, 由 N_3 容易推出

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y). \quad (3)$$

事实上,

$$p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y),$$

于是

$$p(x) - p(y) \leq p(x-y).$$

交换 x 及 y 的地位, 同样可得(由 N_2 知 $p(-x) = p(x)$)

$$p(y) - p(x) \leq p(x-y).$$

结合上面两个不等式, 即得(3)式. 由(3)式可看出: 若 $p(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 则处处连续, 且为一致连续, 即, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在零元邻域 U , 只要 $x-y \in U$, 就有 $|p(x) - p(y)| < \varepsilon$.

定理4 设在线性空间 E 上给定半范族 $\{p_\alpha(x)\}$, 使对每点 $x_0 \neq 0$, 至少有某半范 $p_\alpha(x_0) \neq 0$. 记 $U_\alpha = \{x: p_\alpha(x) < 1, x \in E\}$, 则由 U_α 的有限交 $U = \bigcap_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ (n 为任意的有限正整数)的倍集族 $\{\rho U\}$ 作成的零元邻域基, 使 E 成为局部凸空间; 且每个局部凸空间可如此构成.

证 注意集 $\rho U = \rho \bigcap_{j=1}^n U_{\alpha_j}$ 可由不等式

$$p(x) < \rho, \quad p(x) = \sup_j p_{\alpha_j}(x)$$

给定. 易知 $\{\rho U\}$ 为绝对凸吞吸集族且作成零元邻域基. 因对任一点 $x_0 \neq 0$ 总有某 $p_\alpha(x_0) \neq 0$, 故有 $\rho \neq 0$ 使 $p_\alpha(\rho x_0) > 1$, 即 ρU 不含 x_0 , 随之确有 $\bigcap_\rho \rho U = \{0\}$. 于是据定理3知 $E(T)$ 成为局部凸空间. 反之, 由定理3确定的局部凸拓扑可由半范族给出, 这时只需取 p_α 为对应于 U_α 的半范即可. 定理证毕.

1.2.3 F空间

局部凸空间最简单的例是赋范空间, 它的拓扑由一个范给定:

$$U_\varepsilon = \{x, \|x\| < \varepsilon\}.$$

容易由 $N_1 - N_\infty$ 核验 U_ε 为绝对凸的吞吸集, 且零元有可列的邻域基. 其次是局部凸的距离空间或度量空间注意一般的度量空间不必是局部凸的, 见 1.3.2 的例 1.

在度量空间 E , 对任二点 x, y , 定义有满足如下要求的距离或度量 $\rho(x, y)$:

$$D_1 \quad \rho(x, y) \geq 0, \quad \rho(x, y) = 0 \iff x = y;$$

$$D_2 \quad \rho(x, y) = \rho(y, x), \quad \forall x, y \in E;$$

$$D_3 \quad \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z), \quad \forall x, y, z \in E.$$

这时零元邻域基由 $\{U_\varepsilon\}$ 给定:

$$U_\varepsilon = \{x, \rho(x, 0) < \varepsilon, x \in E\},$$

但要求 U_ε 为凸集. 取 $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, 知度量空间具备第一可列性.

D_3 也称为三角不等式(关于度量的).

若空间 E 的拓扑结构可由引进度量而确定, 即称 E 为可度量化空间. 下面将看到(1.3.2.例1), 并非任一可度量化空间都是局部凸的(度量空间不必是线性空间).

注意局部凸空间必为线性空间.

局部凸的可度量化空间可如下刻画.

定理5 可度量化局部凸空间 E 的拓扑可由绝对凸的零元邻域的单降列 $\{U_n\}$ 给定:

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}.$$

证 因可度量化空间具第一可列性, 故 E 中存在可列的零元邻域基 $\{V_n\}$; 又因 E 为局部凸的, 故可认为每个 V_n 为绝对凸集. 构造列 $U_1 = V_1, U_2 = V_1 \cap V_2, \dots, U_n = \bigcap_{i=1}^n V_i$, 显然

$\{U_n\}$ 即为所需的单降列。条件 $\bigcap U_n = \{0\}$ 则用以保证 T_2 公理成立。

定理6 局部凸空间 $E(T)$ 可度量化的充要条件是： T 由可列个半范 $\{p_j(x)\}$ 给定，且总可假定 $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$ ，于是 $U_j = \{x: p_j(x) < 1\} (j = 1, 2, \dots)$ ，即作成 E 的零元的凸邻域基。当然还须要求：对 E 中任一点 $x_0 \neq 0$ ，至少有某个 $p_j(x_0) \neq 0$ 。

证 显然，对应于单降邻域列 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ 的半范列为单增的： $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$ ，这里 $p_j(x)$ 为对应于绝对凸吞吸集 U_j 的半范。反之，由任意给定的半范列 $\{q_j(x)\}$ ，可得单增半范列

$$p_i(x) = \sup_{1 \leq j \leq i} q_j(x),$$

且 $\{p_j(x)\}$ 确定 E 上局部凸拓扑。至于度量，可如下引进：

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{H p_n(x-y)}.$$

不难核验 ρ 满足要求 $D_1 - D_3$ ，且给出 T 的等价拓扑。定理证毕。

由于赋范空间及可度量化局部凸空间都满足第一可列公理，故每一点可作为一定点列的极限点，且由 T_2 公理知此列有唯一的极限点。于是可引进下列定义。

定义4 若度量空间 E 中列 $\{x_j\}$ 具性质：对任意的 $\varepsilon > 0$ ，存在正数 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ，使当 $m, n \geq n_0$ 时，有 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ ，即称此列为度量空间 E 的基本列或Cauchy列；若 E 中每个基本列都有极限点属于 E ，则称 E 为完备度量空间。完备的可度量化局部凸空间称为Fréchet空间或F空间；完备的赋范空间称为Banach空间或B空间。

定理7 每个度量空间 E 可在保距意义下嵌入唯一的最小完备度量空间 \tilde{E} , 称为 E 的完备化.

注1 任二度量空间 E 及 E' 间的一对一映射 $E \ni x \rightarrow x' \in E'$, 若使 $\rho(x, y) = \rho'(x', y')$, 即称为保距映射. 这里 ρ 及 ρ' 分别是 E 及 E' 中度量, x, y 及 x', y' 分别是 E 及 E' 中任一对对应点. 注意定理7 不限于线性度量空间, 而具有相当的一般性.

证 首先注意 E 中任二基本列 $\{x_j\}, \{y_j\}$ 总使极限

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(x_j, y_j) = \rho(x, y)$$

存在. 事实上, 对点 x_m, x_n, y_n, y_m 应用 D_3 可得:

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m).$$

故数列 $\{\rho(x_j, y_j)\}$ 有极限值存在, 不妨记为 $\rho(x, y)$, 这里 x, y 不必是 E 中的点. 现在证明: 极限值关系 $\rho(x, y) = 0; \{x_j\} \sim \{y_j\}$, 在所有基本列的类中作成一种等价关系. 反射性 ($\{x_j\} \sim \{x_j\}$) 及对称性 ($\{x_j\} \sim \{y_j\} \Rightarrow \{y_j\} \sim \{x_j\}$) 是显然的. 只需核验传递性: $\{x_j\} \sim \{y_j\}, \{y_j\} \sim \{z_j\} \Rightarrow \{x_j\} \sim \{z_j\}$. 但这是 D_3 的显然结果.

为简单起见, 记 $x = \{x_j\}$, 其等价类为 \tilde{x} . 由(3)式得知: 对任何两个类 \tilde{x} 及 \tilde{y} , 可由极限 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(x_j, y_j)$ 一对一地对应于一个实数 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$, 且不难核验它具备性质 $D_1 - D_3$. 故这些类的全体作成度量空间 \tilde{E} . 若对 E 中点 x^0 取所有 $x_j = x^0, j = 1, 2, \dots$, 即得类 \tilde{x}^0 . 故 $E \subset \tilde{E}$, 且这种嵌入映射显然为保距的. 又因对 \tilde{E} 中 $\tilde{x} = \{x_j\}$, 有 E 中基本列 $\{x_j\}$, 使 $\rho(\tilde{x}, x_j) \rightarrow 0$, 故 E 为 \tilde{E} 的处处稠子集.

为核验 \tilde{E} 的完备性, 取 \tilde{E} 中基本列 $\{\tilde{x}_j\}$. 对每个 \tilde{x}_j , 有 E 中点 a_j , 使 $\rho(\tilde{x}_j, a_j) < \frac{1}{j}$. 由于

$$\rho(a_m, a_n) \leq \rho(a_m, \tilde{x}_m) + \rho(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \rho(\tilde{x}_n, a_n),$$

知 $\{a_j\}$ 作成 E 中基本列, 而对应于 \tilde{E} 中点 \tilde{a} ; 但由

$$\rho(\tilde{a}, \tilde{x}_n) \leq \rho(\tilde{a}, a_n) + \rho(a_n, \tilde{x}_n),$$

知 $\tilde{a} = \lim \tilde{x}_n \in \tilde{E}$. 故 \tilde{E} 为完备空间.

最后, 因 E 在 \tilde{E} 中稠且 $\rho(\tilde{x}, \tilde{y})$ 由 $\lim \rho(x_n, y_n)$ 唯一确定, 而在 E 的每个扩张中为同一的, 故 \tilde{E} 属于 E 的任一扩张, 而为 E 在保距意义下的唯一的最小完备空间. 定理证毕.

附带提到, 局部凸空间的基本列 $\{x_j\}$, 是关于每个半范 $p_\alpha(x)$ 的基本列: 对 $\varepsilon_\alpha > 0$, 有 $n_\alpha^0 = n_\alpha^0(\varepsilon_\alpha)$, 使

$$p_\alpha(x_m - x_n) < \varepsilon_\alpha, \quad \forall m, n \geq n_\alpha^0, \quad \alpha \in A.$$

现在介绍可列个 F 空间的并, 所谓的 **LF 空间**. 设给定 F 空间的单增列

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots,$$

且每个嵌入 $E_j \subset E_{j+1}$ 保持点列 $\{x_k\}$ 的收敛性, 即若此列在 E_j 中收敛于零, 也必在 E_{j+1} 中收敛于零.

记 $E = \bigcup_j E_j$. 它有显然的线性结构, 并可引进拓扑, 即

1.1.1 定义 4 前一段所述的严格归纳极限拓扑. 但更方便的是如下地定义 E 中序列的收敛性: 若点列 $\{x_j\}$ 及点 x 同属于某确定的 E_m (可随不同点列而异), 且按其中拓扑有 $x_j \rightarrow x$, 则称 x_j 在 E 中收敛于 x .

注 2 这种未引进拓扑结构而可赋以一定收敛性的空间,

称为拟拓扑空间 (参看: G. Marinescu, *Espaces Pseudo-topologiques et Théorie des Distributions* VEB Verlag Berlin, 1963).

1.2.4 有界集及M空间

在一般拓扑空间, 不能引进有界性概念. 但在度量空间 (不必为线性的) 及拓扑向量空间, 则可定义有界集.

定义5 拓扑向量空间 $E(T)$ 的子集 B 若具性质: 对每个零元邻域 U , 存在相应的正数 $\rho = \rho(U, B)$, 使 $B \subset \rho U$, 即称为 **T 有界集**; 在不致引起误会的情形, 简称为**有界集**.

显然, 有界集的子集也有界; 有限集为有界集; 有界集的心实称包、闭包、凸包都有界; 有限个有界集的并仍然有界.

定理8 拓扑向量空间 E 可赋范化 (即 E 中拓扑可由某个范确定) 的充要条件是: E 有一个有界的凸零元邻域.

证 必要性 由 $N_1 - N_4$ 知赋范空间的集

$$U = \{x, \|x\| < 1\}$$

为绝对凸的, 且显然有界.

充分性 设 V 为 E 中有界的凸零元邻域. V 含绝对凸及吞吸的零元邻域, 故可认为 V 为绝对凸的吞吸集. 定义

$$\|x\| = \inf_{x \in \rho V} \rho,$$

仿照半范定义后的讨论, 知 $\|x\|$ 具性质 $N_1 - N_9$. 此外, 由 V 的有界性知, 当 $\|x\| = 0$ 时, 应有 $x = 0$, 因 $0 \cdot V = 0$. 故 N_4 也成立, 即 $\|x\|$ 确为范.

据此定理知, 在不可赋范化的局部凸空间, 不存在有界的凸零元邻域.

定理9 拓扑向量空间 $E(T)$ 中集 B 有界的充要条件是: 对

每个列 $\{x_j\} \subset B$ 及列 $\{a_j\} \subset K$, 只要 $a_j \rightarrow 0$, 恒有 $a_j x_j \rightarrow 0$.

证 设 B 有界, 对任一心实称零元邻域 U , 有 $\rho > 0$, 使所有的点 $x_n \in \rho U$. 于是 $a_n x_n \in |a_n| \rho U$. 取 $n_0 \geq 0$, 使当 $n \geq n_0$ 时, $\rho |a_n| \leq 1$, 即有 $a_n x_n \in U$. 由 U 的任意性知确有 $a_n x_n \rightarrow 0$.

反过来, 用反证法, 设 B 无界, 则存在列 $\{x_j\} \subset B$ 及心实称零元邻域 U , 使 $x_n \notin nU$. 位于 U 外的列 $\frac{1}{n} x_n$ 不可能趋于零元, 故条件也是充分的. 定理证毕.

对于局部凸空间, 据定理 4 知 B 为有界集的充要条件是: 对半范族 $\{p_\alpha(x)\}$ 的每个半范有 $p_\alpha(x) \leq C_\alpha$, $x \in B$. 特别在可度量化情形为:

$$p_j(x) \leq C_j, \quad x \in B, \quad j = 1, 2, \dots.$$

定义 6 若度量空间 E 具性质: 对任意的 $\varepsilon > 0$, E 有由直径小于 ε 的集组成的有限覆盖, 即称为预紧空间. 这里定义集 A 的直径为 $d = \sup_{x, y \in A} \rho(x, y)$. E 中子集 S 若在导拓扑下为预紧空间, 即称为预紧集或全有界集.

定理 10 拓扑向量空间 E 中的紧集、相对紧集及预紧集, 都是有界集.

证 据定义 6, 预紧集显然有界. 因相对紧集的闭包为紧集, 故只需证明紧集有界. 为此可证无界集 A 不可能为紧集. 事实上, 由无界性知, 对给定零元邻域 U , 存在列 $\{x_n\} \subset A$, 使 $y_n = \frac{1}{n} x_n \notin U$, $n = 1, 2, \dots$. 今证列 $\{x_j\}$ 本身及其无界的任一子列不为紧集, 故无极限点. 若不然而有极限点 x , 取心实称零元邻域 V , 使 $V + V \subset U$, 则在 x 的邻域 $x + V$ 中有足标任意大的点 x_n , 即 $x_n - x \in V$. 另一方面, 列 $\left\{ \frac{x}{n} \right\}$ 趋于零元, 故

对充分大的 n 有 $\frac{x}{n} \in V$. 由 V 的心实称性 知 $\frac{1}{n}(x_n - x) \in V$. 于是

$$\frac{x_n}{n} = \frac{1}{n}(x_n - x) + \frac{x}{n} \in V + V \subset U,$$

而与 $y_n = \frac{x_n}{n} \notin U$ 矛盾. 故定理成立.

定义7 局部凸空间 E 的绝对凸、闭吞吸集称为 **桶**. 若 E 有由桶组成的零元邻域基, 即称为 **桶空间**. 若桶空间的每个有界集为相对紧集, 即称为 **Montel空间** 或 **M空间**. 若 F 空间为 M 空间, 称为 **FM空间**.

定理11 设 F 空间 E 的半范列为 $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \dots$. 若对足标 $j_1 < j_2 < \dots$, 由按半范 $p_{j_n+1}(x)$ 有界的每个集 A , 可选出按半范 $p_{j_n}(x)$ 的基本列, 则 E 为 FM 空间.

证 只需证 E 中每个有界集 A 为相对紧集. 由 A 的有界性知 A 依每个半范有界. 特别由 A 按 p_{j_2} 有界, 据假定可选出按半范 p_{j_1} 的基本列 x_{11}, x_{12}, \dots . 此列依半范 p_{j_3} 有界, 故可选出依半范 p_{j_2} 的基本列 x_{21}, x_{22}, \dots . 如此下去, 得 A 中列阵:

$$\begin{array}{ccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots & & \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}$$

且第 k 行按半范 p_{j_k} 为基本列. 故对角列 $\{x_{jj}\}$ 按所有的半范的基本列, 而为 E 中基本列. 由 E 的完备性知此列有极限点 $x_0 \in E$. 故 A 为相对紧集. 定理证毕.

关于拓扑向量空间的进一步讨论, 参看 Bourbaki, N., *Espaces Vectoriels Topologiques*, I, II, Act. Sci. et Ind. Nos. 1189, 1229, Paris, 1953, 1955. Robertson A. P. and Robertson, W. *Topological Vector Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1964, Kelley, J. L., *Linear Topological Spaces*, D. van Nostrand, New York, (1976).

1.3 线性映射

1.3.1 一般考察

由拓扑向量空间 E 到 F 的映射 $y = L(x)$, 若具性质

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

即称为可加映射; 若具性质

$$L(ax) = aL(x), \quad \forall a \in K, \quad \forall x \in E,$$

即称为一次齐次映射, 或简称为齐次映射. 可加齐次映射, 称为线性映射. 特别当 F 为实或复数域时, L 相应地称为可加、齐次及线性泛函. 映射 E 中有界集为 F 中有界集的映射(泛函)称为有界映射(泛函).

连续映射的定义已在1.1.3中一般给出.

容易核验可加映射 L 具性质

$$L(0) = 0; \quad L(-x) = -L(x),$$

且若 L 在一点(例如在点 $x = 0$)连续, 则处处连续. 事实上,

$$L(0) = L(0 + 0) = L(0) + L(0) = 2L(0),$$

故 $L(0) = 0$. 由此知

$$L(x - x) = L(x + (-x)) = L(x) + L(-x) = L(0) = 0.$$

最后, 若 L 在 $x = 0$ 连续, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 有零元邻域 U , 使

当 $x \in U$ 时, $|L(x)| < \varepsilon$. 故对任一点 $x_0 \in E$, 只要 $x \in x_0 + U$, 即 $x - x_0 \in U$, 即有

$$|L(x) - L(x_0)| = |L(x - x_0)| < \varepsilon,$$

故 L 在 E 中处处连续, 且为一致连续的.

定理1 连续的线性映射必为有界映射.

证 设 L 为拓扑向量空间 E 及 F 之间的连续线性映射, B 为 E 中任一有界集. 若 $B' = LB$ 为 F 中无界集, 则存在零元邻域 $V \subset F$, 使集列 $\frac{1}{n}B' (n=1, 2, \dots)$ 无一全含于 V . 故存在点列

$\{x_n\} \subset B$, 使 $\frac{1}{n}Lx_n = \frac{1}{n}y_n \notin V$. 另一方面, 由 L 的连续性知

有 E 中零元邻域 U , 使 $LU \subset V$. 但据 1.2.4 定理 9 知 $\frac{1}{n}x_n \rightarrow 0$, 故

从某个 n_0 开始, 所有的 $\frac{1}{n}x_n (n \geq n_0)$ 应含于此零元邻域 $U \subset E$.

于是应有 $\frac{1}{n}y_n \in V$, 所得矛盾表明 B' 应为有界集. 故定理成立.

定理2 设拓扑向量空间 E 具第一可列性, 则由 E 到拓扑向量空间 F 的任一有界线性映射 L 也是连续映射.

证 若 L 不连续, 则对某零元邻域 $V \subset F$ 及 E 中单降零元邻域列 $\{U_i\}$, 存在 $x_n \in \frac{1}{n}U_n$, 使 $Lx_n \notin V$. 但列 $\{nx_n\}$ 为 E 中有界集, 而列 $\{y_n\}$, $y_n = nLx_n = L(nx_n)$ 在 F 中无界. 所得矛盾表明定理的断言正确.

推论1 定义于满足第一可列公理的拓扑向量空间的线性映射, 连续性与有界性等价.

推论2 当且仅当对 F 中每个半范 $q_j(y)$, 有 E 中相应半范 $p_{k(j)}(x)$, 使

$$\sup_{p_{k(j)}(x) \leq 1} q_j(Lx) < \infty \quad (1)$$

时, 局部凸可度量化空间 E 及 F 间的线性映射 L 为连续映射.

事实上, 若 L 连续, 则对 F 中每个零元邻域 $V = \{y, q_j(y) \leq \rho\}$, 有 E 中相应零元邻域 $U = \{x, p_{k(j)}(x) \leq \sigma\}$, 使 $LU \subset V$, 即 $q_j(Lx) \leq \rho$, 故(1)式成立:

$$\sup_{p_{k(j)}(x) \leq 1} q_j(Lx) = \sup_{p_{k(j)}(x') \leq \sigma} q_j L\left(\frac{x'}{\sigma}\right) \leq \frac{\rho}{\sigma} < \infty.$$

这里 $x' = \sigma x$, 并用到半范性质 N_2 及 L 的线性. 反之, 对 E 中有界集 $A = \{x, p_{k(j)}(x) \leq C_k, x \in E\}$, 由(1)式有

$$\sup_{p_{k(j)}(x) \leq 1} q_j(Lx) \leq C'_j < \infty,$$

于是,

$$\sup_{x \in A} q_j(x) = \sup_{p_{k(j)}(x) \leq 1} q_j(Lx) C_k \leq C_k C'_j = C'_j,$$

$$j = 1, 2, \dots,$$

即 LA 为 F 中有界集, 故据定理2知 L 为连续映射. 推论成立.

记 $\mathcal{L}(E, F)$ 为局部凸可度量化空间 E 及 F 间的所有连续线性映射全体. 它有自然的线性结构

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1 x + L_2 x, \quad L_1, L_2 \in \mathcal{L}, x \in E;$$

$$(\alpha L)(x) = L(\alpha x), \quad \alpha \in K, x \in E, L \in \mathcal{L},$$

故作成向量空间. 对每个 $L \in \mathcal{L}(E, F)$, 固定 j 及相应的 $k(j)$, 可引进 \mathcal{L} 中的半范

$$p_{j, k(j)}(L) = \sup_{p_{k(j)}(x) \leq 1} q_j(Lx),$$

记对固定的关系 $k(j)$ 使(1)式成立的 $L \in \mathcal{L}$ 的集合为 $\mathcal{L}_{k(j)}(E,$

(F) .

定理3 空间 $\mathcal{S}_{k(j)}(E, F)$ 由如下的半范列

$$p_{\bar{j}, k(\bar{j})}(L) = \sup_{1 \leq i \leq N} [p_{j_1, k(j_1)}(L), \dots, p_{j_N, k(j_N)}(L)] \quad (2)$$

作成局部凸空间, 这里 $\bar{j} = (j_1, \dots, j_N)$ 为自然数的任一有限集. 由(2)式确定的拓扑称为 $\mathcal{S}_{k(j)}$ 中的弱拓扑.

证 (2)式显然作成半范; 且若对某 \bar{j} 有

$$p_{\bar{j}, k(\bar{j})}(L) = 0,$$

则对所有的 j 有 $q_j(L) = 0$, 于是 $Lx = 0$. 但 x 为 E 中任一点, 故 L 为零映射. 由此据1.2.2定理4知定理正确.

推论3 空间 $\mathcal{S}(E, F)$ 是 $\mathcal{S}_{k(j)}(E, F)$ 关于所有对应关系 $j \rightarrow k(j)$ 的并: $\mathcal{S} = \bigcup_{k(j)} \mathcal{S}_{k(j)}(E, F)$.

更一般的讨论见1.2.3注2所引书.

特别当 F 为实或复数域时, 空间 \mathcal{S} 称为 E 的对偶空间, 记作 E' . 由推论2及3可得如下重要结果.

推论4 局部凸可度量化空间上的每个连续性泛函 u 乃对某固定的相应半范 p_k 为有界的:

$$|u(x)| < \infty, \quad p_k(x) < \infty, \quad x \in E.$$

事实上, 这时 F 中只有唯一的范 $|u(x)|$.

1.3.2 连续线性泛函

先举一个例子, 说明存在拓扑向量空间, 其对偶空间仅含零元素; 然后给出存在非零连续线性泛函的充要条件.

例1 记 $L_p[a, b]$ 为在 $[a, b]$ 上 p 次幂 Lebesgue 可积的函数组成的空间, 这里 $0 < p < 1$. 记

$$U(\varepsilon) = \{f(x) \in L_p[a, b], \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon\},$$

$U(\varepsilon)$ 显然为心实称的吞吸集, 且 $\bigcap_{\varepsilon} U(\varepsilon) = \{0\}$. 为证明 $\{U(\varepsilon)\}$ 作成邻域基, 须核验: 对每个 U , 有 V , 使 $V + V \subset U$. 为此可证,

$$\|f + g\|_p \leq 2^{(1-p)/p} (\|f\|_p + \|g\|_p). \quad (3)$$

注意, 当 $q > 1$ 时, 函数 $\frac{1+x^q}{(1+x)^q} (x \geq 0)$ 有一极小值 2^{1-q} , 它于 $x=1$ 时可取到. 故 $1+x^q \geq 2^{1-q}(1+x)^q$, 从而, 对 $c, d > 0$, 取 $x = \frac{d}{c}$ 有,

$$c^q + d^q \geq 2^{1-q}(c+d)^q, \quad q > 1.$$

另外, 对 $n > 1$ 有 $\frac{1+x^n}{(1+x)^n} \leq 1 (x \geq 0)$. 取 $x = \left(\frac{d}{c}\right)^p, \quad p = \frac{1}{n}$, 得,

$$(c+d)^p \leq c^p + d^p, \quad 0 < p < 1.$$

结合上面两个不等式, 并取 $q = \frac{1}{p}$, 有

$$\|f + g\|_p \leq \left(\int |f|^p dx + \int |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

故(3)式成立. 由此知, 对给定的 U 取 $V = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} U$, 就能使 $V + V \subset U$. 据1.2.1定理2知, L_p 以 $\{U(\varepsilon)\}$ 为邻域基作成拓扑向量空间. 可注意, 由(3)式可断定: $U(\varepsilon)$ 不是凸集.

现在设 $u(f) \neq 0$ 为 L_p 上连续线性泛函, f 为 L_p 中元. 于是应存在 $g_0(x) \in L_p$, 使 $u(g_0) \geq 1$. 对 $s \in (a, b)$, 令

$$g_s^1(x) = \begin{cases} g_0(x), & a \leq x \leq s, \\ 0, & s < x, \end{cases}$$

$$g_s^2(x) = g_0(x) - g_s^1(x).$$

容易算出 $\|g_s^1(x)\|_p^p = \int_a^s |g_0(x)|^p dx$, 它关于 s 由零连续增加到 $\|g_0\|_p^p$, 故存在 $s_0 \in (a, b)$, 使

$$\|g_{s_0}^1(x)\|_p^p = \|g_{s_0}^2(x)\|_p^p = \frac{1}{2} \|g_0(x)\|_p^p,$$

由于 $u(g_0) \geq 1$, 对 $j=1$ 或 2 , 应有 $u(g_{s_0}^j) \geq \frac{1}{2}$. 对这个 j , 令

$$g_1(x) = 2g_{s_0}^j(x),$$

则有 $u(g_1) \geq 1$. 但 $\|g_1\|_p = 2^{1-\frac{1}{p}} \|g_0\|_p$. 继续这种构造, 得 L_p 中列 $\{g_n(x)\}$, 且具性质 (注意 $1 - \frac{1}{p} < 0$)

$$u(g_n) \geq 1; \quad \|g_n\|_p = 2^{n(1-\frac{1}{p})} \|g_0\|_p \rightarrow 0,$$

而与 u 的连续性假定不符. 故 $L_p[a, b]$ 当 $0 < p < 1$ 时, 不存在非零的连续线性泛函.

于是出现问题: 怎样的拓扑线性空间容许有非零的连续线性泛函存在? 为解决这个问题, 先讨论泛函的延拓问题. 为简单起见, 只对实值情形证明, 它在复值情形仍然成立.

定理4 (Hahn-Banach延拓定理) 设在实向量空间 E 上给定非负的、正齐次的、次可加泛函 $q(x)$, 即 $q(x)$ 具备如下性质:

$$q(x) \geq 0; \quad q(ax) = aq(x), \quad a \geq 0; \quad \forall x \in E;$$

$$q(x+y) \leq q(x) + q(y), \quad \forall x, y \in E.$$

又设在 E 的线性子空间 F 在给定线性泛函 $l(z)$, 而具性质

$$l(z) \leq q(z), \quad \forall z \in F, \quad (4)$$

则 $l(z)$ 可延拓为 E 上的线性泛函 u , 使

$$u(x) \leq q(x), \quad \forall x \in E; \quad u(z) = l(z), \quad \forall z \in F. \quad (5)$$

若 E 具拓扑且 $q(x)$ 连续, 则 u 亦连续.

证 设 $l(x)$ 对 $F_1 \supset F$ 已定义且 (4) 式在 F_1 上成立. 对某 $x_0 \notin F_1$, 再延拓 $l(x)$ 于 $[x_0] \oplus F_1$, 即由 x_0 及 F_1 作成线性空间

$$[x_0] \oplus F_1 = \{\alpha x_0 + z, \alpha \in R, z \in F_1\},$$

并使 (4) 式仍成立. 为此, 对 F_1 中任二点 z 及 z_1 , 作差

$$\begin{aligned} l(z') - l(z) &= l(z' - z) \leq q[(x_0 + z') + (-x_0 - z)] \\ &\leq q(z' + x_0) + q(-x_0 - z), \end{aligned}$$

于是

$$-q(-z - x_0) - l(z) \leq q(x_0 + z') - l(z'), \quad \forall z, z' \in F_1,$$

因此

$$\sup_{z \in F_1} [-q(-z - x_0) - l(z)] \leq \inf_{z' \in F_1} [q(x_0 + z') - l(z')],$$

故存在实数 r 使

$$-q(-z - x_0) - l(z) \leq r \leq q(z + x_0) - l(z), \quad \forall z \in F_1. \quad (6)$$

对所有的 $z \in F_1$, 令

$$l(\alpha x_0 + z) = \alpha r + l(z),$$

而延拓 l 于 $[x_0] \oplus F_1$ 上. 今证 (4) 式仍成立. 先设 $\alpha > 0$. 由 (6) 式的右边知

$$r \leq q\left(\frac{z}{\alpha} + x_0\right) - l\left(\frac{z}{\alpha}\right), \quad \frac{z}{\alpha} \in F_1.$$

以 α 乘上式得

$$\alpha r \leq q(z + \alpha x_0) - l(z).$$

这表明

$$l(z + \alpha x_0) = \alpha r + l(z) \leq q(z + \alpha x_0),$$

故(4)式成立. 若 $\alpha = -\rho < 0$, 则由(6)式的左边有

$$-q\left(\frac{z}{\rho} - x_0\right) + l\left(\frac{z}{\rho}\right) \leq r, \quad \frac{z}{\rho} \in F_1.$$

以 ρ 乘上式得:

$$-q(z + \alpha x_0) + l(z) \leq \rho r = -\alpha r, \quad \rho = -\alpha > 0.$$

这表明

$$l(z + \alpha x_0) = \alpha r + l(z) \leq q(z + \alpha x_0),$$

故(4)式仍成立. 当 $\alpha = 0$ 时, (4)式显然成立.

应用数学归纳法(当向量空间 E 的基底基数超过可列无限时, 则应用超限归纳法), 继续上述延拓过程, 即得 u 在整个 E 上的存在性. 若 $q(x)$ 在点 $x = 0$ 连续, 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在心实称邻域 U , 使对所有 $x \in U$, 有:

$$0 < q(x) < \varepsilon.$$

于是由

$$u(x) \leq q(x) < \varepsilon, \quad \forall x \in U;$$

$$-u(x) = u(-x) \leq q(-x) < \varepsilon, \quad \forall -x \in U,$$

知 $|u(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in U$, 故 u 在点 $x = 0$ 并随之处处连续. 定理证毕.

经常用到的不是一般形式的定理4, 而是下面的特殊情形; 它们对实或复空间也都是成立的.

定理5 设在向量空间 E 上给定半范 $p(x)$, 而在 E 的线性子空间 F 上给定线性泛函 $l(z)$, 且具性质

$$|l(z)| \leq p(z), \quad \forall z \in F,$$

则 $l(z)$ 可延拓于全空间 E 上得线性泛函 u ,

$$|u(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in E.$$

若 E 具拓扑且 $p(x)$ 连续, 则 u 亦连续.

事实上, 半范为非负的、正齐次的、次可加泛函。

推论5 对拓扑向量空间 E 上每个连续半范 $p(x)$, 存在连续线性泛函 u , 使 $|u(x)| \leq p(x)$, 且对任一固定点 $x_0 \in E$, 有 $u(x_0) = p(x_0)$ 。

事实上, 取 $l(ax_0) = ap(x_0)$, 得一维线性子空间 $F = [x_0]$ 上的连续线性泛函 l , 再应用定理 5 即得 u 。

推论6 对向量空间 E 上每个非负的、正齐次的、次可加泛函 $q(x)$ 及每点 $x_0 \in E$, 有实(或复)值线性泛函 u 使 $u(x) \leq q(x)$, $x \in E$, 且 $u(x_0) = q(x_0)$ (或 $\operatorname{Re} u(x) \leq q(x)$, $\operatorname{Re} u(x_0) = q(x_0)$)。若 E 具拓扑且 q 连续, 则 u 亦连续。

事实上, 只需对线性子空间 $[x_0] = \{ax_0; \forall a \in K\}$ 定义 $l(ax_0) = aq(x_0)$ (或 $\operatorname{Re} l(ax_0) = aq(x_0)$), 再应用定理 4 即可。

现在可回答非零的连续线性泛函的存在性问题。

定理6 拓扑向量空间 E 上存在非零的连续线性泛函的充要条件是: E 中有不同于 E 的凸零元邻域。

证 若 u 为 E 上非零连续线性泛函, 则集

$$\{x; |u(x)| < 1\}$$

即为不同于 E 的绝对凸零元邻域。反之, 若 U 为不同于 E 的凸零元邻域, 据 1.2.2 定理 3 前的讨论, 可认为 U 为绝对凸吞吸集。于是半范

$$p(x) \leq \inf_{x \in \rho U} \rho$$

为连续函数。事实上, 据 p 的定义知:

$$p(x) \leq 1, \quad \forall x \in U.$$

随之对所有 $x \in \varepsilon U$, 有 $p(x) \leq \varepsilon$. 故 p 在点 $x = 0$ 连续; 由 1.2.2 (3) 式知 p 处处连续。因 U 不同于 E , 存在 $x_0 \in E \setminus U$, 使 $p(x_0) > 1$, 故 $p \neq 0$ 。应用推论 6, 即得非零连续线性泛函的存在

性。定理证毕。

由定理 6 可看出局部凸空间类的重要性。

1.3.3 线性及双线性映射

定理 7 1) 二完备度量空间 E 与 F 间的连续线性映射 A , 或为拓扑同态(即 A 同时为开映射), 或 AE 为 \overline{AE} 中第一纲集;

2) 当且仅当 AE 为闭集时, A 为拓扑同态。

证 1) 因 \overline{AE} 为完备的, 且可度量化, 不妨认为 $\overline{AE} = F$ 。若 AE 不为第一纲集, 记

$$U_\rho = \{x: \|x\| \leq \rho, x \in E\},$$

这里 $\|x\| \equiv \rho_E(x, 0)$, ρ_E 为 E 中度量。为证 A 为开映射, 先证 $\overline{AU_\rho}$ 含 F 中某球 $V_\sigma = \{y: \|y\| < \sigma, y \in F\}$, 这里 $\|y\| = \rho_F(y, 0)$, ρ_F 为 F 中度量; 再证 AU_r 当 $r > \rho$ 时含 V_σ , 于是 A 映 E 中内点为 F 中内点, 而为开映射。因 $U_{\rho/2}$ 为心实称吞吸集, 故有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} nU_{\rho/2} = E,$$

于是 $AE = \bigcup_n A(nU_{\rho/2})$ 。据假定, AE 不是第一纲集, 故有某个 $A(nU_{\rho/2})$ 随之 $A(U_{\rho/2})$ 不是第一纲集。因此 $\overline{AU_{\rho/2}}$ 有内点, 即存在 $y \in AU_{\rho/2}$ 及零元邻域 $V \subset F$, 使 $y + V \subset \overline{AU_{\rho/2}}$ 。由此得:

$$V \subset -y + \overline{AU_{\rho/2}} \subset \overline{AU_{\rho/2}}.$$

因由 $U_{\rho/2}$ 的心实称性及 A 的线性易知 $AU_{\rho/2}$ 也是心实称的, 故 $-y \in AU_{\rho/2}$ 。但 V 中含某球 V_σ , $\sigma > 0$ 充分小。今证当 $r > \rho$ 时, AU_r 也含 V_σ 。令 $\rho = \rho_1$, $\sigma = \sigma_1$, 取 $\rho_2 > \rho_3 > \dots$, 使

$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_j < r$. 对应于每个 U_{ρ_n} , 有 V_{σ_n} 使 $V_{\sigma_n} \subset AU_{\rho_n}$, 且 σ_n

$\rightarrow 0$, 对任意点 $y_0 \in V_{\sigma}$, 有 $x_1 \in U_{\rho_1}$, 使 $y_1 = Ax_1$ 具备性质:

$\|y_0 - y_1\| < \sigma_1$. 同样, 因 $V_{\sigma_2} \subset \overline{AU_{\rho_2}}$, 有 $x_2 \in U_{\rho_2}$, 使 $y_2 = Ax_2$ 具性质: $\|y_0 - y_1 - y_2\| < \sigma_2$. 如此进行下去. 由

$$\left\| \sum_{i=1}^M x_i \right\| < \rho_N + \dots + \rho_M$$

及 E 的完备性, 知 $\sum x_i$ 收敛于某点 $x_0 \in E$, 且因 $\sum \rho_i < r$ 知 $x_0 \in U_r$. 今

$$Ax_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N Ax_i = \lim_{i \rightarrow \infty} y_i = y_0,$$

故 $y_0 \in AU_r$. 但 y_0 为 V_{σ} 中任一点, 故 $V_{\sigma} \subset AU_r$. 于是 A 确为开映射.

2) 若 AE 为闭集, 则亦为完备度量空间, 而不是第一纲集.

事实上, 若 AE 为可列个疏集的并: $AE = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$, 则存

在球 $U_1 = \{y: \|y\| \leq \rho_1 < 1\}$, 使 $U_1 \cap M_1 = \emptyset$; 同样, U_1 中有半径不超过 $\frac{1}{2}$ 的闭球 U_2 , 使 $U_2 \cap M_2 = \emptyset$; 如此类推, 列

$U_1 \supset U_2 \supset \dots$ 显然有一公共点而不属于任何一个 M_i . 这与假

定 $AE = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ 不符, 故 AE 不可能为第一纲集. 于是据已证得

的1), 知 A 为拓扑同态. 反之, 若 A 为拓扑同态, 则 A 也是闭映射. 但 E 是完备空间, 故 AE 也是完备空间, 随之为闭的. 定理全部得证.

作为定理 7 的应用, 有如下重要结果.

定理 8 (闭图象定理) 当且仅当图象

$$G(A) = \{(x, Ax); x \in E\}$$

为 $E \times F$ 中的闭集时, 二完备度量空间 E 及 F 间的线性映射 A 为连续. 等价的表述是:

$$x_n \rightarrow x_0, \quad Ax_n \rightarrow y_0 \Rightarrow Ax_0 = y_0.$$

证 若 A 连续, 则仅当 $\{x_n\}$ 为 E 中基本列时, (x_n, Ax_n) 为 $E \times F$ 中基本列. 设 $x_n \rightarrow x_0$, 则有 $Ax_n \rightarrow Ax_0$, 故 $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x_0, Ax_0)$, 即 $G(A)$ 为闭集. 反之, 若 $G(A)$ 为闭集, 则射影 $(x, Ax) \rightarrow x$ 为 $G(A)$ 到 E 上的一对一连续映射, 据定理 7 为拓扑同构. 故由 $x_n \rightarrow 0$ 有 $(x_n, Ax_n) \rightarrow (0, 0)$, 随之 $Ax_n \rightarrow 0$, 即 A 在点 $x=0$ 连续, 于是处处连续. 定理得证.

定理 9 若连续线性映射 A 把完备度量空间 E 一对一地映到完备度量空间 F 上, 则逆映射 A^{-1} 也是连续线性映射.

事实上, 由定理 7 知 A 为开映射, 而由一对一性知 A^{-1} 存在. 据 1.1.3 定理 2 知 A^{-1} 为连续线性映射 (A^{-1} 的线性是显然的).

下面考虑双线性映射.

定义于向量空间 E_1 及 E_2 的乘积空间 $E_1 \times E_2$ 上的抽象函数 $B(x, y)$, $x \in E_1$, $y \in E_2$, 若分别关于 x 及 y 都是线性的, 即若

$$B(ax_1 + bx_2, y) = aB(x_1, y) + bB(x_2, y);$$

$$B(x, ay_1 + by_2) = aB(x, y_1) + bB(x, y_2),$$

即称为双线性映射; 若 B 关于 x 为线性的, 而关于 y 为反线性或斜线性的, 即:

$$B(x, ay) = \overline{a} B(x, y), \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

这里 \bar{a} 为 a 的复共轭数, 则称 B 为斜双线性的 (sesquilinear). 若 E_1 与 E_2 都有拓扑结构, 且值域 F 也有拓扑结构, 则当 B 关于 x 及 y 整体连续时, 称 B 为连续的; 若 B 分别对每个固定的 x (或 y) 关于 y (或 x) 连续时, 即称 B 为分别连续的 (separately continuous).

定理10 由 $E_1 \times E_2$ 到 F 中的双线性映射 B 若在点 $(0, 0)$ 连续, 则处处连续.

证 只需对任一点 $(x_0, y_0) \in E_1 \times E_2$ 改写

$$B(x, y) - B(x_0, y_0)$$

$$= B(x - x_0, y_0) + B(x_0, y - y_0) + B(x - x_0, y - y_0).$$

由于 B 在 $(0, 0)$ 的连续性, 对 F 中每个零元邻域 W 及 $W_1 + W_1 + W_1 \subset W$, 存在零元邻域 $U \times V \subset E_1 \times E_2$, 使当 $(x - x_0, y - y_0) \in U \times V$ 时, $B(x - x_0, y - y_0) \in W_1$; 当 $\frac{1}{n} x_0 \in U$ 及

$y - y_0 \in \frac{1}{n} V$ 时, $B(x_0, y - y_0) = B\left(\frac{x_0}{n}, n(y - y_0)\right) \in W_1$;

当 $\frac{1}{m} y_0 \in V$ 及 $x - x_0 \in \frac{1}{m} U$ 时, $B(x - x_0, y_0) \in W_1$. 故当

$(x - x_0, y - y_0) \in \left(\frac{1}{m} U\right) \times \left(\frac{1}{n} V\right)$ 时, 有 $B(x, y) - B(x_0, y_0)$

$\in W_1 + W_1 + W_1 \subset W$. 定理得证.

定理11 由 F 空间 E_1 及可度量化空间 E_2 的积 $E_1 \times E_2$ 到可度量化空间 F 的分别连续的 (斜) 双线性映射, 也是整体连续的.

证 因可度量化空间具第一可列性, 故其上抽象函数的连续性可由序列连续性表述. 据定理10, 只需证明: 对 $E_1 \times E_2$ 中每个收敛于零元的列 (x_n, y_n) , 在 F 中有

$$B(x_n, y_n) \rightarrow 0.$$

对固定的 x_0 , 映射 $B(x_0, y)$ 关于 y 连续, 故对 F 中每个零元邻域 W , 有 E_2 中零元邻域 V , 使当 $y_n \in V$ 时有

$$B(x_0, y_n) \subset W, \quad n \geq n_0,$$

于是

$$\bigcup_{n \geq n_0} B(x_0, y_n) \subset W.$$

对 $n = 1, 2, \dots, n_0 - 1$, 总可取 $m > 0$, 使

$$\bigcup_{j=1}^{n_0-1} B(x_0, y_j) \subset mW,$$

故对某 $\mu > 0$, 有

$$C \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, y_n) \subset \mu W,$$

即 C 为有界集. 对固定的 y_n , 把 $B(x, y_n)$ 作为由 E_1 到 F 中的线性映射 B_n . 今证存在 E_1 中零元邻域 U , 使

$$\bigcup_{x \in U} B(x, y_n) \subset W.$$

这时不妨认为 W 是闭的心实称集. 取闭的心实称零元邻域 W_1 , 使 $W_1 + W_1 \subset W$. 作集

$$M = \bigcap_n B_n^{-1}(W_1),$$

由 B_n 的连续性, 知每个 $B_n^{-1}(W_1)$ 随之而使 M 为闭集, 并含开子集, 因 E_1 为完备空间. 又因对每个 $x_0 \in E_1$, 集 $\{B_n(x_0, y_n)\}$ 有界, 故存在 $\rho > 0$, 使 $\rho B(x_0, y_n) \subset W_1$, 即 $\rho x_0 \in M$, 故 M 为吞吸集. M 显然为心实称的: 由 $\alpha W_1 \subset W_1$, $|\alpha| \leq 1$, 有

$$\alpha B(x_0, y_n) = B(\alpha x_0, y_n) \subset W_1, \quad x_0 \in M, \quad |\alpha| \leq 1.$$

这表明 $\alpha x_0 \in M$, $|\alpha| \leq 1$. 故 $M - M \equiv \{x - x'; x, x' \in M\}$ 含 E_1 中某零元邻域 U , 使

$$B(U, y_n) \subset B(M - M, y_n) \subset W_1 - W_1 \subset W,$$

于是得:

$$\bigcup_{x \in U} B(x, y_n) \subset W.$$

由此特别有

$$B(x_n, y_n) \subset W, \quad n \geq n_1,$$

这表明 B 在 $(0,0)$ 为连续的. 定理证毕.

进一步的讨论, 除参看 1.2.4 结尾所附的书外, 还可参考

Schaeffer, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1970. Cristescu, R., *Topological Vector Spaces*, Noordhoff, Leyden, 1977.

1.4 可微流形

1.4.1 范畴与函子

定义1 范畴 \mathcal{A} 是元素 $\{X, Y, \dots\}$ 的集, 对任二元 X, Y 有模射的集 $\text{Mor}(X, Y)$, 使对任三个元 X, Y, Z , 满足合成律

$$\text{Mor}(X, Y) \text{Mor}(Y, Z) \rightarrow \text{Mor}(X, Z),$$

并服从下列公理:

Cat.1 每个 $\text{Mor}(X, Y)$ 有元 id_X , 在合成律下为左及右单元(恒等模射);

Cat.2 合成律具结合性.

集 $\text{Mor}(X, Y)$ 中元称为 X 到 Y 的模射, 记为 $f: X \rightarrow Y$. 二模射 f, g 的合成记作 $f \circ g$ 或 fg .

由范畴 \mathcal{A} 到 \mathcal{A}' 的函子 $\lambda: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ 为一映射, 对 \mathcal{A} 中每元 X 有 \mathcal{A}' 中元 $\lambda(X)$ 相应, 且对 \mathcal{A} 中每个模射 $f: X \rightarrow Y$, 有 \mathcal{A}' 中模射 $\lambda(f): \lambda(X) \rightarrow \lambda(Y)$, 使当 f, g 可合成时, 有

$$\begin{cases} \lambda(fg) = \lambda(f)\lambda(g); \\ \lambda(id_X) = id_{\lambda(X)}, \end{cases}$$

这种函子称为共变函子。若 λ 具性质

$$\begin{cases} \lambda(f): \lambda(Y) \rightarrow \lambda(X), \quad \lambda(id_X) = id_{\lambda(X)}; \\ \lambda(fg) = \lambda(g)\lambda(f), \end{cases}$$

则 λ 称为反变函子。在多元情形,可类似地定义对某些元为共变而对其余元为反变的混合函子。

由 \mathscr{A} 到 \mathscr{A}' 的所有同型(指纯共变、纯反变或同型混合)函子作成范畴 $\text{Fun}(\mathscr{A}, \mathscr{A}')$, 其模射常称为自然变换, 以代替函子模射, 而如下定义。设 λ, μ 为二共变函子, 则自然变换 $t: \lambda \rightarrow \mu$ 由模射集

$$t_X: \lambda(X) \rightarrow \mu(X), \quad \forall X \in \mathscr{A}$$

组成, 并对 \mathscr{A} 中任一模射 $f: X \rightarrow Y$, 使图

$$\begin{array}{ccc} \lambda(X) & \xrightarrow{t_X} & \mu(X) \\ \lambda(f) \downarrow & & \downarrow \mu(f) \\ \lambda(Y) & \xrightarrow{t_Y} & \mu(Y) \end{array}$$

为可模图。所谓映射的可换图, 乃指任二起止映射序列作成同一合成映射。例如上图表明:

$$t_Y \circ \lambda(f) = \mu(f) \circ t_X.$$

在任一范畴 \mathscr{A} 中, 对模射 $f: X \rightarrow Y$, 若存在模射 $g: Y \rightarrow X$, 使 fg 及 gf 都是恒等模射, 则称 f 为同构。例如, 拓扑空间组成的范畴中的同构为拓扑同构或同胚; 点集组成的范畴中的同构为双射。

设 $f: X \rightarrow Y$ 为模射。若模射 $g: Y \rightarrow X$ 使 $fg = id_Y$, 则称 g 为 f 的截口。注意, f 的截口一般不是唯一的。

下面简单地介绍一下束的概念。束是由局部信息过渡到全局信息的机制，由于流形是局部Euclid空间的“并贴”，所以束论十分有用。

定义2 拓扑空间 E 到范畴 \mathcal{A} 上的**预束** \mathcal{F} 是函子集，而具性质：

- 1) 对每个非空开集 $U \subset E$ ，对应有集 $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{A}$ ；
- 2) 对 E 中任二开集 $U, V \subset U$ ，有映射集(称**缩射同态**)

$$r_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V).$$

且满足要求：

- a) $r_U^U = id_U$ ， id_U 为 U 上恒等映射；
- b) 对 $U \supset V \supset W$ ，有 $r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$.

若 \mathcal{F} 及 \mathcal{G} 为 E 上预束，则模射 $h: \mathcal{F} \leftarrow \mathcal{G}$ 为映射集

$$h_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U),$$

而对 E 中每个开集 U ，使下图为可换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h_U} & \mathcal{G}(U) \\ r_V^U \downarrow & & \downarrow r_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{h_V} & \mathcal{G}(V) \end{array} \quad V \subset U.$$

若 h_U 为内含 $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ ，则称 \mathcal{F} 为 \mathcal{G} 的**子预束**。

注1 通常还要求 $\mathcal{F}(U)$ 作成可换群，对子预束也如此(即具子群结构)，且缩射同态及模射保持代数结构(即作成同态群)，一般称 $\mathcal{F}(U)$ 中元为 \mathcal{F} 在 U 上的**截面**。

定义3 预束 \mathcal{F} 称为**束**，若对 E 中开集 U 的每个开覆盖列 $\{U_i\}$ ， \mathcal{F} 具性质：

S_1 若 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ 且对所有的 i ，有 $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(t)$ ，则
 $s = t$ ；

S_2 若 $s_i \in \mathcal{S}(U_i)$, 且当 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 时, 对所有这样的 i 及 j 有

$$r_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = r_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j),$$

则存在 $s \in \mathcal{S}(U)$, 使对所有的 i , 有 $r_{U_i}^U(s) = s_i$.

束的模射或束映射是相应基底预束的模射. 若束 \mathcal{S} 的子预束为束, 即称为 \mathcal{S} 的子束. 束(或预束)之间的同构由 h_U 的同构来定义. 注意 S_1 表明: 集 U 上的全局信息由其局部信息唯一确定; 而 S_2 则表明: 局部信息可结合给出全局信息.

例1 设 X, Y 为拓扑空间, $C_{X, Y}$ 为 X 上如下定义的预束:

1) $C_{X, Y}(U) \equiv \{f: U \rightarrow Y, f \text{ 连续}, U \subset X\}$;

2) 对 $f \in C_{X, Y}(U)$, $r_V^U(f) \equiv f|_V$, $V \subset U \subset X$.

可核验此预束满足要求 S_1 及 S_2 , 故为束.

例2 设 \mathbb{C} 为复平面, 定义预束 \mathcal{B} , 使 $\mathcal{B}(U)$ 为开集 U 中有界全纯函数组成的代数. 记 $U_i = \{z: |z| < i\}$, 有 $\mathbb{C} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. 定义 $f_i \in \mathcal{B}(U_i)$ 为: $f_i(z) = z$. 由 Liouville 定理知不存在具性质 $f|_{U_i} = f_i$ 的 $f \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$, 故 \mathcal{B} 不为束. 考察其根由, 在于预束 \mathcal{B} 乃由有界性这个全局性质所定义, 而不是单由局部性质所确定.

定义4 拓扑空间 X 的覆盖空间 Y 是如下的拓扑空间, 使连续盖射 $\pi: Y \rightarrow X$ 为局部同胚. $\pi: Y \rightarrow X$ 沿开集 $U \subset X$ 的截面为连续映射 $f: U \rightarrow Y$, 使 $\pi \circ f = id_U$. 沿 U 的截面之全体记为 $T(U, Y)$.

定义5 设 \mathcal{S} 为 X 上预束, 用

$$\mathcal{S}_\pi = \lim_{\substack{\rightarrow \\ \pi \in U}} \mathcal{S}(U)$$

记 $\mathcal{F}(U)$ 关于缩射集 $\{r_x^U\}$ 的直接限 (归纳限), 即 U 取遍 x 的开邻域而趋于点 x 时所得极限. 若 \mathcal{F} 的代数结构在直接限下保持, 则 \mathcal{F}_x 亦具此结构, 而称为 \mathcal{F} 在 x 的茎. 存在自然映射

$$r_x^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x, \quad x \in U,$$

而使 $\mathcal{F}(U)$ 中元对应于直接限中的等价类. 若 $s \in \mathcal{F}(U)$, 则 $s_x \equiv r_x^U(s)$ 称为 s 在 x 的芽, s 则称为芽 s_x 的代表.

1.4.2 导射与切射

古典分析不便于直接推广到流形上. 因此, 先对微分运算给出新的理解.

可微函数 $f: U \subset R \rightarrow R$ 在点 $u_0 \in U$ 的导数通常理解为 f 的图形在 u_0 的切线斜率. 新的理解则把

$$Df(u_0) = f'(u_0)$$

看成作用于向量 $u - u_0$ 的线性映射, 即: $Df(u_0)$ 是由 R 到 R 的唯一线性映射, 而使映射

$$g: U \rightarrow R; \quad g(u) = f(u_0) + Df(u_0)(u - u_0) \quad (1)$$

在点 u_0 与 f 相切. 这启示我们给出如下的一般定义 (为简单起见, 以下只考虑有限维实向量空间, 而实际对 B 空间及 F 空间都适用).

定义6 设 E 及 F 为二有限维实向量空间, 对任二映射 $f, g: U \subset E \rightarrow F$, U 为开集, 若有

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{\|f(u) - g(u)\|}{\|u - u_0\|} = 0,$$

则称 f 及 g 在 $u_0 \in U$ 相切, 这里 $\|\cdot\|$ 为相应空间的范或度量.

不难核验下面的定理.

定理1 设 E, F 如上, 对于映射 $f: U \rightarrow F$ 及点 $u_0 \in U$, 最

多存在一个线性映射 $L \in L(E, F)$, 使映射

$$g_L: U \rightarrow F; \quad g_L(u) = f(u_0) + L(u - u_0)$$

在 u_0 与 f 相切. 这里 $L(E, F)$ 记由 E 到 F 的线性映射的集合.

定义7 若对 f 存在定理 1 所述线性映射 $L \in L(E, F)$, 则称 f 在 u_0 为可微的, 并定义 $Df(u_0) = L$. 若 f 在每点 $u \in U$ 可微, 则映射

$$Df: U \rightarrow L(E, F); \quad u \rightarrow Df(u)$$

称为 f 的导射. 当 Df 连续时^{*)}, 称 f 属 $C^1(U)$.

例3 设 $f \in C^1(U)$; $U \subset R^1 \rightarrow R^n$, 则 Df 为由 R^m 到 R^n 的线性连续映射, 而可由关于 R^m 的标准基底

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$$

的分量表出:

$$Df(u) \cdot e_j = \left(\frac{\partial f^1}{\partial x_j}(u), \dots, \frac{\partial f^n}{\partial x_j}(u) \right), \quad j = 1, \dots, m.$$

这里 (f^1, \dots, f^n) 为 f 的分量. 故 $Df(u)$ 为通常的 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial f^k}{\partial x_j} \right)$.

定义8 设 $f \in C^1(U)$. 定义 f 的切射 Tf 如下:

$$Tf: U \times E \rightarrow F \times F;$$

$$(Tf)(u, e) = (f(u), Df(u) \cdot e), \quad u \in U, e \in E, \quad (2)$$

这里 $Df(u) \cdot e$ 表示 $Df(u)$ 作用于 $e \in E$.

定理2 (合成映射的链式法则) 设 E, F, G 为有限维实向量空间. 对 C^1 中任二映射

$$f: U \subset E \rightarrow V \subset F; \quad g: V \rightarrow G$$

合成映射 $g \circ f: U \rightarrow G$ 也属 C^1 , 且

^{*)} $L = Df$ 作为有限维空间 E 上线性映射, 关于 e 总是连续的; 这里指关于 u 的连续性.

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf), \quad (3)$$

即:

$$\begin{aligned} & (g \circ f, D(g \circ f)(u) \cdot e) \\ &= (g(f(u)), Dg(f(u)) \cdot (Df(u) \cdot e)). \end{aligned} \quad (4)$$

这可由定义直接导出。注意(3)式表明切射 T 是共变函子。

为了引进高阶导射与切射, 用 $\mathcal{L}^k(E, F)$ 记由 $E \times \cdots \times E$ (k 重)到 F 的所有连续多重线性映射的集(多重线性指对每个元分别为线性的, 例如双线性), 用 $\mathcal{L}_s^k(E, F)$ 记 \mathcal{L}^k 中对称元组成的子集, 即对任何排列 $\pi(1, \cdots, k) \equiv (\pi(1), \cdots, \pi(k))$ 使 $f(e_1, \cdots, e_k) = f(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(k)})$ 的线性映射 f 的集; 用 $\mathcal{L}_a^k(E, F)$ 记斜对称元的子集, 即具性质

$$f(e_1, \cdots, e_k) = (\operatorname{sgn} \pi) f(e_{\pi(1)}, \cdots, e_{\pi(k)})$$

的线性映射 f 的集, 这里

$$\operatorname{sgn} \pi = \begin{cases} 1, & \text{当}\pi\text{为偶排列时;} \\ -1, & \text{当}\pi\text{为奇排列时.} \end{cases}$$

注2 代数学中已证明: 任何排列可表为二指标的对换之积, 例如

$$\pi(1, 2, 3) \equiv (2, 3, 1) = (1, 2)(1, 3),$$

这种表示不是唯一的, 但因子数为偶数或奇数, 则是不变的。当因子数为偶数时, 相应排列称为偶排列, 否则称为奇排列。

定理3 存在如下的自然同构:

$$\mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E, F)) \approx \mathcal{L}^{k+1}(E, F).$$

证 对 $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^k(E, F))$, 定义 $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}^{k+1}(E, F)$ 如下:

$$\tilde{\varphi}(e_1, \cdots, e_{k+1}) = \varphi(e_{k+1})(e_1, \cdots, e_k).$$

容易核验, 对应 $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi}$ 为同构, 即: 它是双射.

同样, 可等同 $\mathcal{L}(R, F)$ 于 F ; 对 $\varphi \in \mathcal{L}(R, F)$, 相应以 $\varphi(1) \in F$.

但 $\mathcal{L}(E, R)$ 与 E 却是对偶关系, 一般不可把 $E' = \mathcal{L}(E, R)$ 等同于 E .

现在定义高阶导射. 对 C^1 映射 $f: U \subset E \rightarrow F$, 有 $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$. 故可对 Df 递推地应用定义 8, 而一般地定义高阶导射 $D^r f$ 如下.

$$D^r f = D(D^{r-1} f); U \subset E \rightarrow \mathcal{L}^r(E, F), r = 2, 3, \dots$$

据定理 3, 这个定义是合理的.

若 $D^r f$ 存在且连续, 则称 f 属于 $C^r(U)$.

高阶导数与微分顺序无关的性质, 引出下面的表述.

定理 4 若 $f: U \subset E \rightarrow F$ 属 $C^r(U)$, 则 $D^r f(u) \in \mathcal{L}_r^r(E, F)$.

类似地可定义高阶切射 $T^r f$. 应用数学归纳法, 由 (3) 式可得:

定理 5 (C^r 合成映射的链式法则) 设 E, F, G 都是有限维实向量空间, $f: U \subset E \rightarrow V \subset F, g: V \rightarrow G, f, g \in C^r$, 则 $g \circ f$ 也属 C^r , 且

$$T^r(g \circ f) = (T^r g) \circ (T^r f). \quad (5)$$

注意, 对于高阶导射 $D^r(g \circ f)$, 相应的表示要复杂得多. 故切射在全局分析中比导射更为自然.

例 4 不难计算

$$\begin{aligned} T^2 f: (U \times E) \times (E \times E) &\rightarrow (F \times F) \times F \times F, \\ (u, e_1, e_2, e_3) &\rightarrow (f(u), Df(u) \cdot e_1, Df(u) \cdot e_2, \\ &\quad D^2 f(u)(e_1, e_3) + Df(u) \cdot e_3). \end{aligned}$$

定义 9 若 $f: U \subset E \rightarrow V \subset F$ 属 C^r 且为双射, 同时逆映射

f^{-1} 也属 C^r , 则称 f 为 C^r 微分同胚($1 \leq r \leq \infty$).

1.4.3 流形

在给出流形的形式定义之前, 先举一个例子. 在 R^{n+1} 中考虑 n 维球面 $S^n = \{x; \|x\|^2 \equiv x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$. 可构造 S^n 到 R^n 的局部双射, 例如由南极投射到北极处超切平面上的球极射影. 去掉南极 P , 这是 $S^n \setminus P$ 到 R^n 上的局部双射. 同样, 由北极出发的球极射影也给出局部的双射. 但不存在由 S^n 到 R^n 的单个双射. 还可注意, 在用分别从南极及北极出发的两个双射覆盖 S^n 时, 这两个双射在其公共定义域存在光滑的可逆映射, 即: 这两个双射在公共定义域中是相容的.

于是可引出一般的定义.

定义10 集 S 上的局部坐标或细图 (Chart), 是由 S 上子集 U 到某有限维实向量空间 E 中开子集的双射 φ , 记作 (U, φ) . S 上的图集 (Atlas) 是细图的集 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), \alpha \in A\}$, 而具性质:

$$MA1 \quad S = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha};$$

MA2*) 对 \mathscr{A} 中任二细图 $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$, 只要 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, 则迭合映射

$$\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} |_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}: E \rightarrow E$$

为 C^r ($0 \leq r \leq \infty$) 微分同胚. $\varphi|_V$ 记 φ 在 V 上的缩射.

若 $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ 仍作成图集, 则二图集 \mathscr{A}_1 及 \mathscr{A}_2 称为等价的. S 上图集的等价类称为 S 上 C^r 可微结构, 记作 \mathscr{S} . 集 S 附以 C^r 可微结构 \mathscr{S} 称为 C^r 可微流形, 记作 $M = (S, \mathscr{S})$. 通常把 M 等于基集 S , 而略去可微结构 \mathscr{S} .

*) 这就是迭合映射的相容性要求.

注意对 S 未要求拓扑结构，但由流形定义，可对 M 或 S 引进拓扑。集 $A \subset S$ 若具性质：对每点 $a \in A$ ，有细图 (U, φ) ，使 $a \in U \subset A$ ，则称 A 为开集。由于流形 S 局部微分同胚于有限维实向量空间，故 S 上的拓扑至少具 T_2 分离性及次紧性。这正是一般对可微流形所加的要求。

特别， C^0 可微流形称为**拓扑流形**。

若可微流形 M 的每点 a 有细图 (U, φ) ，使 $a \in U$ 且 $\varphi(U)$ 同胚于 R^n 中开集，则称 M 为 **n 维流形**。

以后只考虑分离的、第二可列的 n 维 C^∞ 可微流形，并简称为可微流形。

例5 一个集可有多种可微结构。例如 R 有不相容（因下面的 $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ 在点 $x=0$ 不可微）的细图（也是图集）

$$(U_1, \varphi_1): U_1 = R, \quad \varphi_1(r) = r^3 \in R,$$

$$(U_2, \varphi_2): U_2 = R, \quad \varphi_2(r) = r \in R,$$

它们作成两种不等价的可微结构。但这两种结构作成的两个流形是微分同胚的，因为存在光滑双射 $f: \varphi_1 = \varphi_2 \circ f$ 。

例6（射影空间） 设 E 为有限维向量空间。结合于 E 的射影空间 $P(E)$ 定义为集：

$$P(E) = \{E \text{ 中过原点的一维子空间全体}\}.$$

特别重要的是 $E = R^{n+1}$ 及 $E = C^{n+1}$ 的情形。现在证明 $P_n(R) \equiv P(R^{n+1})$ 为可微流形。考虑由 $R^{n+1} \setminus \{0\}$ 到 $P_n(R)$ 上的投影

$$\pi(x) = \pi(x_0, \dots, x_n) = \{(tx_0, \dots, tx_n): t \in R^1\}.$$

注意 $\pi(x)$ 是由点 $x = (x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0) \in R^{n+1}$ 张成的一维子空间。在 $P_n(R)$ 上引进由 π 导出的商拓扑，即当且仅当 $\pi^{-1}(U)$ 为 $R^{n+1} \setminus \{0\}$ 中开集时， $U \subset P_n(R)$ 为开集。于是 π 为连续映射，且 $P_n(R)$ 为具可列基底的 T_2 空间。因映射

$$\pi|_{S^n}: S^n \rightarrow P_n(R)$$

连续且为盖射, 故 $P_n(R)$ 为紧空间. 若 $x \in R^{n+1} \setminus \{0\}$, 记 $\pi(x) = [x_0, \dots, x_n]$, 并称 (x_0, \dots, x_n) 为 $[x_0, \dots, x_n]$ 的齐次坐标. 若 (x'_0, \dots, x'_n) 为 $[x_0, \dots, x_n]$ 的另一组齐次坐标, 则因 $[x_0, \dots, x_n]$ 是 (x_0, \dots, x_n) 或 (x'_0, \dots, x'_n) 张成的一维子空间, 故对某个 $t \in R \setminus \{0\}$ 有 $x_j = tx'_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, 于是 $\pi(x) = \pi(tx)$. 利用齐次坐标, 可如下定义 $P_n(R)$ 上的可微结构 (实际上是解析结构): 令

$$U_\alpha = \{\xi \in P_n(R); \xi = [x_0, \dots, x_n], x_\alpha \neq 0\},$$

$$\alpha = 0, 1, \dots, n,$$

每个 U_α 为开集, 且 $P_n(R) = \bigcup_{\alpha=0}^n U_\alpha$. 再定义细图为:

$$h_\alpha: U_\alpha \rightarrow R^n; \quad h_\alpha([x_0, \dots, x_n])$$

$$= \left(\frac{x_0}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_n}{x_\alpha} \right) \in R^n$$

可核验 h_α 为同胚, 且 $h_\alpha \circ h_\beta^{-1}$ 为微分同胚. 故得 $P_n(R)$ 上的可微结构.

类似地可讨论任意射影空间 $P(E)$.

一般, 可引进集

$$G_k(E) = \{E \text{ 中所有 } k \text{ 维子空间的集}\}, \quad 0 < k < \dim E,$$

而称为结合于 E 的 Grassmann 流形. 对 G_k 可仿上引进可微结构, 它是 $k(n-k)$ 维紧流形, 这里 n 是 E 的维数.

R^3 中锥面 $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ 不是可微流形, 甚至不是拓扑流形, 因在点 $(0, 0, 0)$ 近旁不存在任何细图.

设 (S_1, \mathcal{S}) 及 (S_2, \mathcal{S}_2) 为任意两个流形, 可构造乘积流形 $(S_1 \times S_2, \mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2)$, 其可微结构由图集

$$\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2); (U_i, \varphi_i) \in \mathcal{S}_i, \quad i = 1, 2\}$$

确定.

若 M 为可微流形, A 为 M 的开子集, 则 M 上的可微结构自然地导出 A 上可微结构, 而称 A 为 M 的开子流形. 一般地, M 的子流形如下定义.

定义11 流形 M 的子流形 B 是 M 的子集而具性质: 对每点 $b \in B$, 有 M 中细图 (U, φ) , 使 $b \in U$, 并具子流形性质: 存在有限维实向量空间 E 及 F , 使

$$(SM) \quad \varphi: U \rightarrow E \times F, \quad \varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\}).$$

考虑二流形间的映射 $f: M \rightarrow N$. 若对每点 $x \in M$ 及 N 中细图 (V, ψ) 而使 $f(x) \in V$, 总存在 M 中细图 (U, φ) , 使 $x \in U$, $f(U) \subset V$, 且 f 的局部表示

$$f_{\psi\varphi} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

属 C^r , 则称映射 f 属 C^r .

1.4.4 没入与浸盖

设 M 及 N 为同维流形, 并给定映射 $f: M \rightarrow N$. 若在点 $x \in M$ 存在邻域, 微分同胚于点 $y = f(x) \in N$ 的某个邻域, 即称 f 在点 x 为局部微分同胚. 于是通常的反函数定理可表述如下.

反函数定理 设 $f: M \rightarrow N$ 使切射 Tf 在点 x 为同构, 则 f 在 x 为局部 C^1 微分同胚.

注3 流形映射 f 的切射 Tf 可用局部表示 $f_{\psi\varphi}$ 的切射及细图的切射如下确定:

$$Tf_{\psi\varphi} = T(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = (T\psi) \circ (Tf) \circ (T\varphi^{-1});$$

$$Tf = (T\psi)^{-1} \circ (Tf_{\psi\varphi}) \circ (T\varphi^{-1})^{-1}.$$

由于切射的同构由Jacobi行列式不为零所表征, 于是引出如下概念.

当 $\dim M < \dim N$ 即 M 的维数小于 N 的维数时, 映射 f 在点 x 具最佳局部性态乃要求切射 Tf 在点 x 为内射. 这时称 f 在点

x 为没入。若 f 在 M 中每点为没入, 则称 f 为由 M 到 N 中的没入。 R^k 到 R^l ($k < l$) 中的内含映射称典则没入:

$$J: (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

对微分同胚来说, 这是唯一的局部没入。

定理6 (局部没入定理) 设 $f: M \rightarrow N$ 在点 x 为没入, 则在点 x 及 $y = f(x)$ 近旁存在局部坐标, 使

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0).$$

证 先选择局部表示, 使构成可换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array}, \quad \varphi(0) = x, U \subset R^k;$$

$$\psi(0) = y, V \subset R^l.$$

因 $Tg(0): U \times R^k \rightarrow V \times R^l$ 为内射, 必要时改变 R^l 中基底, 可认为 $Tg(0)$ 的 $l \times k$ 矩阵取形:

$$\begin{pmatrix} I_k \\ 0 \end{pmatrix},$$

I_k 为 $k \times k$ 单位方阵。作映射 $G: U \times R^{l-k} \rightarrow R^l$ 如下:

$$G(x, z) = g(x) + (0, z), \quad z \in R^{l-k}.$$

G 映 R^l 中的开集为 R^l 中的开集, 且 $TG(0)$ 的方阵为 I_l 。由反函数定理知 G 在坐标原点为 R^l 中局部微分同胚。注意 $g = G \circ J$, J 为典则没入。因 ψ 及 G 在原点为局部微分同胚, 故 $\psi \circ G$ 亦然, 且可用作 N 在点 y 的局部坐标。必要时适当缩小 U 及 V , 可使下图为可换图:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \circ G \\
 U & \xrightarrow{J} & V
 \end{array}$$

由此得

$$f = \psi \circ (G \circ J) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G) \circ J \circ \varphi^{-1},$$

这正好给出定理所需结果。

推论1 若 f 在点 x 为没入, 则 f 在 x 的某邻域中为没入。

这个推论表明没入为局部性质。因此, 任意没入 $f: M \rightarrow N$ 的象集 $f(M) \subset N$ 不必是 N 的子流形。事实上, 没入不一定是内射。但即使是内射的没入 f , $f(M)$ 也不必是 N 的子流形。仅当还要求内射的没入 f 为适映射: 即 N 中每个紧集的原象 $f^{-1}(N)$ 也是紧集时, 象集 $f(M)$ 才是 N 中子流形。这就是下面定理的结论。

定理7 内射的适没入(称嵌入) $f: M \rightarrow N$ 微分同胚地映 M 到 N 的子流形上。

证 为证 $f(M)$ 为 N 的子流形, 只需证任一开集 $W \subset M$ 的象 $f(W)$ 为 $f(M)$ 的开子集, 于是据定理6, 即知子流形性质(SM)成立。若 $f(W)$ 不为开子集, 则存在点列 $\{y_i\} \subset f(M)$, 不属于 $f(W)$, 但收敛于某点 $y \in f(W)$ 。今 $\{y, y_i\}$ 为紧集, 而 f 为适映射, 故 $\{y, y_i\}$ 在 M 中的原象也是紧集。由于 f 为内射, 每点 y_i 只有一个原象点 $x_i \in M$, 且 y 的唯一原象点 $x \in W$ 。因 $\{x, x_i\}$ 为紧集, 故有子列(不妨仍记为 x_i)收敛于 $z \in M$ 。于是有 $f(x_i) \rightarrow f(z)$ 。但 $f(x_i) \rightarrow f(x)$, 由 f 的内射性知应有 $z = x$ 。但 W 为开集, 且 $x_i \rightarrow x$, 故对大的 i 有 $x_i \in W$, 随之 $f(x_i) = y_i \in f(W)$ 。这与假定 $y_i \notin f(W)$ 不符。故 $f(W)$ 为开集。因此, $f(M)$ 为 N 的子流形。容易验证 $f: M \rightarrow f(M)$ 为微分同胚。

首先, 已知它是局部微分同胚. 由于它是双射, 故 f^{-1} 有定义并属 C^∞ . 定理证毕.

当 $\dim M > \dim N$ 时, 若切射 Tf 在点 x 为盖射, 则称 f 在点 x 为浸盖; 若 f 在 M 的每点为浸盖, 则称 f 为由 M 到 N 上的浸盖. 特别, R^k 到 R^l ($k > l$) 上的投影称典则浸盖:

$$K: (x_1, \dots, x_k) \rightarrow (x_1, \dots, x_l).$$

类似于没入映射, 有如下结果.

定理8 (局部浸盖定理) 设 $f: M \rightarrow N$ 在点 x 为浸盖, 则存在 x 及 $y = f(x)$ 的局部坐标, 使

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l).$$

证 设给定任意的局部映射可换图,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ U & \xrightarrow{g} & V \end{array} \quad \begin{array}{l} \varphi(0) = x, \quad U \subset R^k; \\ \psi(0) = y, \quad V \subset R^l. \end{array}$$

因 $Dg(0)$ 为盖射: $R^k \rightarrow R^l$ ($k > l$), 由 R^k 中坐标的满秩线性变换, 总可认为 $Dg(0)$ 的 $l \times k$ 矩阵取形 $(I_l | 0)$. 现在定义 $G: U \rightarrow R^k$ 如下:

$$G(a) = (g(a), a_{l+1}, \dots, a_k), \quad a = (a_1, \dots, a_k) \in U.$$

方阵 $DG(0) = I_k$, 故 G 在点 $x = 0$ 为局部微分同胚. 于是 G^{-1} 存在且为由原点某开邻域 U' 到 U 中的微分同胚. 据 G 的定义知 $g = K \circ G$, K 为典则浸盖. 故 $g \circ G^{-1} = K$, 随之得可换图:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \varphi \circ G^{-1} & & \uparrow \psi \\ U' & \xrightarrow{K} & V \end{array}$$

而给出定理所需映射 $f = \psi \circ K \circ (\varphi \circ G^{-1})^{-1}$.

推论2 若 f 在点 x 为浸盖, 则它在 x 的某邻域中为浸盖.

给定光滑映射 $f: M \rightarrow N$. 若对点 $y \in N$, 在每个使 $f(x) = y$ 的点 x , 切射 Tf 为盖射, 则称 y 为 f 的**正则值**, 相应的原象 x 都称为**正则点**, $f(M)$ 的非正则值称为 f 的**临界值**, 相应的原象 x 称为**临界点**. 一般, $N \setminus f(M)$ 中的 y 也称为 f 的正则值.

定理9 (原象定理) 若 y 为 $f: M \rightarrow N$ 的正则值, 则原象 $f^{-1}(y)$ 为 M 的子流形, 且

$$\dim f^{-1}(y) = \dim M - \dim N.$$

证 据定理8知存在 x 及 $y = f(x)$ 的局部坐标使

$$f(x_1, \dots, x_k) = (x_1, \dots, x_l),$$

且 y 对应于 R^l 中原点. 在点 x 近旁, $f^{-1}(y)$ 为点集 $\{(0, \dots, 0, x_{l+1}, \dots, x_k)\}$. 确切些说, 设 V 为 x 在此局部坐标下的邻域, 则集 $f^{-1}(y) \cap V$ 为使 $x_1 = 0, \dots, x_l = 0$ 的集. 故函数 x_{l+1}, \dots, x_k 作成此集的局部坐标; 而集 $f^{-1}(y) \cap V$ 则为 $R^{k-l} \times \{0\}$ 的相对开子集. 故 $f^{-1}(y)$ 为 M 的子流形. 维数关系是显然的.

1.5 向量丛

1.5.1 定义

粗略地说, 向量丛是在流形的每点附一向量空间的集, 例如 n 维球面 S^n 及在其每点的切平面作成向量丛(切丛); S^n 及其每点的法线也作成向量丛(法丛). 下面分两步引进向量丛的一般定义.

定义1 设 E 及 F 为有限维实向量空间, U 为 E 的开子集. 称直积 $U \times F$ 为**局部向量丛**; 特别若 $F = R^m$, 则称 $U \times R^m$ 为**平**

凡局部向量丛， U 称为底空间，而可等同于 $U \times \{0\}$ ，所谓的零截面。对点 $u \in U$ ，称 $\{u\} \times F$ 为局部向量丛在点 u 上的纤维，可赋以 F 的向量空间结构。由 $\pi(u, f) = u \ (\forall f \in F)$ 定义的映射

$$\pi: U \times F \rightarrow F$$

称局部向量丛的投影。对任一点 $u \in U$ ，其上纤维是 $\pi^{-1}(u)$ 。

因 $U \times F$ 为 $E \times F$ 的开子集，故为子流形。

设 φ 为局部向量丛间的映射： $U \times F \rightarrow U' \times F'$ 。若 φ 为 C^∞ 微分同胚且具形

$$\varphi(u, f) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) \cdot f),$$

φ_2 为线性同构，则称 φ 为局部向量丛同构。

定义2 集 S 的局部向量丛细图是 $(U, \varphi)'$ $U \subset S$ ， $\varphi: U \rightarrow U' \times F'$ 为双射（ $U' \times F'$ 可与 φ 有关）。 S 上的向量丛图集是族 $\mathscr{B} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ 。而具性质：

$$VBA1 = MA1, \text{ 即 } S = \bigcup_i U_i;$$

$VBA2$ 对 \mathscr{B} 中任二细图 $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j), U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ，有 $\varphi_i(U_i \cap U_j) = U_i'' \times F_i''$ ，且迁移函数

$$\psi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}$$

为局部向量丛同构。

若 \mathscr{B}_1 及 \mathscr{B}_2 是 S 上二向量丛图集，则当 $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ 仍作成 S 上图集时，称为等价图集。 S 上向量丛结构是向量丛图集的等价类；向量丛是底集 S 及其上向量丛结构 \mathscr{B} 的结合，记作 $E = (S, \mathscr{B})$ ；通常等同 E 于 S ，而略去结构 \mathscr{B} 不记。

由 $VBA1-2$ 知 $MA1-2$ 成立，故 \mathscr{B} 在 S 上导出可微结构。以后总认为 S 具分离的、第二可列性拓扑，并有固定维数 n 。

对向量丛 $E = (S, \mathscr{B})$ 可如下定义零截面：

$$E_0 = \{e \in E; \exists (U, \varphi) \in \mathcal{Z} \Rightarrow e = \varphi^{-1}(u', 0), u' \in U\},$$

故 E_0 是局部向量丛的所有零截口的并.

设 $(U, \varphi) \in \mathcal{Z}$ 为向量丛细图, $e_0 \in U$, 而使 $\varphi(e_0) = (u', 0)$. 记

$$E_{e_0, \varphi} = \varphi^{-1}(\{u'\} \times F'),$$

并赋以由双射 φ 导出的有限维实向量空间结构, 而称为向量丛 E 在点 e_0 上的纤维.

定理1 1) 若 e_0 位于二细图 (U_1, φ_1) , (U_2, φ_2) 的交集 $U_1 \cap U_2$ 中, 则

$$E_{e_0, \varphi_1} = E_{e_0, \varphi_2}$$

等号表明点集因子及实向量空间因子分别重合;

2) 对 $e \in E$, 恰存在一点 $e_0 \in E_0$, 使对某 (U_1, φ_1) 有

$$e \in E_{e_0, \varphi_1};$$

3) E_0 是 E 的子流形;

4) 映射 $\pi: E \rightarrow E_0$; $\pi(e) = e_0$ 为盖射且属 C^∞ , 这里 e_0 是 2) 中由 e 所确定的唯一对应元 e_0 .

证 1) 设 $\varphi_1(e_0) = (u'_1, 0)$, $\varphi_2(e_0) = (u'_2, 0)$. 可认为 φ_1 及 φ_2 的定义域等同. 因迁移函数 $\alpha = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ 为局部向量丛同构, 而

$$\begin{aligned} E_{e_0, \varphi_1} &= \varphi_1^{-1}(\{u'_1\} \times F'_1) = \varphi_2^{-1} \circ \alpha^{-1}(\{u'_1\} \times F'_1) \\ &= \varphi_2^{-1}(\{u'_2\} \times F'_2) = E_{e_0, \varphi_2}, \end{aligned}$$

这里用到如下诸关系

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1}: \{\varphi_2(e)\} &= \{u'_2\} \times F'_2 \rightarrow e, & \varphi_1 \varphi_2^{-1}: \varphi_2(e) &\rightarrow \varphi_1(e); \\ \alpha: \varphi_2(e) &= \{u'_2\} \times F'_2 \rightarrow \{u'_1\} \times F'_1, \\ \alpha^{-1}: \{u'_1\} \times F'_1 &\rightarrow \{u'_2\} \times F'_2. \end{aligned}$$

故 $E_{e_0} \varphi_1 = E_{e_0} \varphi_2$, 且向量空间结构一致.

2) 若 $e \in E$, $\varphi_1(e) = (u_1, f_1)$, $\varphi_2(e) = (u_2, f_2)$, $e_1 = \varphi_1^{-1}(u_1, 0)$, $e_2 = \varphi_2^{-1}(u_2, 0)$, 则 $\alpha(u_2, f_2) = (u_1, f_1)$, 故 α 为线性同构: $\{u_2\} \times F'_2 \rightarrow \{u_1\} \times F'_1$. 于是

$$\varphi_1(e_2) = \alpha(u_2, 0) = (u_1, 0) = \varphi_1(e_1) \Rightarrow e_2 = e_1.$$

3) 只需验证: 对 $e_0 \in E_0$, 存在细图 (U, φ) 具 1.4.3 子流形性质 (SM). 由这个细图构造向量丛细图, 不妨仍记为 (U, φ) , 使 $e_0 \in U$, 即得性质 (SM):

$$\varphi(U \cap E_0) = U' \times \{0\} = \varphi(U) \cap (E'_0 \times \{0\}).$$

4) π 显然为盖射. 只需证局部有 $\pi \in C^\infty$. 由局部表示知 $\pi: (u', f') \rightarrow (u', 0)$, 故局部有 $\pi \in C^\infty$.

推论1 设 E 为向量丛, 其零截面 E_0 为其子流形, 且存在映射 $\pi: E \rightarrow E_0$, 称为**向量丛投影**, 属于 C^∞ 且为盖射. 对每点 $e_0 \in E_0$, $\pi^{-1}(e_0)$ 为 e_0 上的纤维, 而由任一向量丛细图导出其上向量空间结构.

根据这个推论, 可把向量丛 $E = (S, \mathcal{V})$ 表示为 $\pi: E \rightarrow E_0$ 或 (E, π, E_0) .

定义3 设 $\pi: E \rightarrow B$ 为向量丛. π 的 C^r 截面是任一个具如下性质的 C^r 映射 $\xi: B \rightarrow E$, 使对每一点 $b \in B$, 有

$$\pi(\xi(b)) = b \quad \text{即} \quad \pi \circ \xi = \text{id}_B.$$

用 Γ_π^r 记 π 的所有 C^r 截面的集, 并附以 (无限维) 实向量空间结构.

1.5.2 切丛

在 1.4.4 中曾用局部表示定义流形映射 f 的切射 Tf , 现在用另一途径引进切射, 而分成几步.

定义4 设 M 为流形, $m \in M$. 称 C^1 映射 $C: I \rightarrow M$ 为过点 m 的曲线, 这里 I 为 \mathbb{R} 中开区间, 且 $0 \in I$, $C(0) = m$. 设 c_1 及 c_2 都是 M 上过点 m 的曲线, (U, φ) 为 M 中细图, 使 $m \in U$. 若 $\varphi \circ c_1$ 及 $\varphi \circ c_2$ 在点 O 相切, 则称 c_1 及 c_2 关于 φ 在点 m 相切.

定理2 设 c_1 及 c_2 为 M 上过点 m 的二曲线, (U_1, φ_1) 及 (U_2, φ_2) 为 M 上含 m 的二细图, 则当且仅当 c_1 及 c_2 关于 φ_2 在点 m 相切时, 它们关于 φ_1 在点 m 相切.

证 当且仅当

$$D(\varphi_1 \circ c_1)(0) = D(\varphi_1 \circ c_2)(0)$$

时, c_1 及 c_2 关于 φ_1 在 m 相切, 这里不妨认为 $c_1(0) = c_2(0) = m$. 因

$$\varphi_2 \circ c_j = (\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) \circ (\varphi_1 \circ c_j), \quad j = 1, 2,$$

据1.4.2定理2知有

$$D(\varphi_2 \circ c_1)(0) = D(\varphi_2 \circ c_2)(0),$$

故定理成立.

这个定理表明: 曲线在一点 $m \in M$ 相切与所用细图无关. 显然, 在点 m 相切是过 m 的曲线间的等价关系, 记其等价类为 $[c]_m$, 这里 c 是过点 m 的等价曲线族的代表.

定义5 过流形 M 上点 m 的等价曲线类的集 $T_m(M) \equiv \{[c]_m\}$ 称为 M 在点 m 的切空间. 对集 $A \subset M$, 记 $TM|_A = \bigcup_{m \in A} T_m(M)$; 特别当 $A = M$ 时,

$$TM \equiv TM|_M$$

称为 M 的切丛. 由 $\tau_M([c]_m) = m$ 定义的映射

$$\tau_M: TM \rightarrow M$$

称为 M 的切丛投影.

现在应证明1.4.2中定义的 $T_1: T_1U = U \times F$ 与上面定义的 T_2 在局部情形重合一致: $T_1U = T_2U$, 即在与流形任一开

集微分同胚的有限维实空间上同构。

定理3 设 U 为有限维实向量空间 E 的开子集, c 为过点 $u \in U$ 的曲线, 则存在唯一的 $e \in E$, 使由 $c_{u,e}(t) = u + te$ 定义的曲线 $c_{u,e}$ 在点 u 与 c 相切。

证 由1.4.2知 $Dc(0)$ 是 $\mathcal{L}(R, E)$ 中唯一的线性映射, 使由下式

$$g(t) = u + Dc(0)t$$

给定的曲线 $g: R \rightarrow E$ 在 $t=0$ 切于 c 。取 $e = Dc(0) \cdot 1$, 有 $g = c_{u,e}$, 故定理成立。

据定理3知映射 $i: T_1U \rightarrow T_2U: i(u, e) = [c_{u,e}]_u$ 为双射, 并可用 i 在 T_2U 上定义局部向量丛结构。由此知 T_1U 与 T_2U 为局部同构。

定理4 设流形 M 上二曲线 c_1 及 c_2 切于 $m \in M$, $f: M \rightarrow N$ 属 C^1 , 则 $f \circ c_1$ 及 $f \circ c_2$ 切于 $f(m) \in N$ 。

证 由1.4.2定理2知 $f \circ c_1$ 及 $f \circ c_2$ 都属 C^1 。为了证明它们在点 $f(m)$ 相切, 取 N 上细图 (V, ψ) , 使 $f(m) \in V$ 。今证

$$D(\psi \circ f \circ c_1)(0) = D(\psi \circ f \circ c_2)(0). \quad (1)$$

因 $\psi \circ f \circ c_j = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_j)$, $j=1, 2$, 这里 (U, φ) 为 M 上细图, 且 $m \in U$, $f(U) \subset V$ 。据1.4.2定理2, 知(1)式成立, 故定理得证。

由这个定理可引出下面的定义。

定义6 设流形映射 $f: M \rightarrow N$ 属 C^1 , 定义

$$Tf: TM \rightarrow TN; Tf([c]_m) = [f \circ c]_{f(m)},$$

而称 Tf 为 f 的切射。

定理5 1) 设 $f: M \rightarrow N$, $g: N \rightarrow K$ 都属 C^1 , 则 $g \circ f: M \rightarrow K$ 也属 C^1 , 且有

$$T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf);$$

2) 设 $h: M \rightarrow M$ 为恒等映射, 则 $Th: TM \rightarrow TM$ 也是恒等映射;

3) 若 $f: M \rightarrow N$ 为微分同胚, 则 $Tf: TM \rightarrow TN$ 为双射, 且

$$(Tf)^{-1} = T(f^{-1}).$$

证 1) 设 $(U, \varphi), (V, \psi), (W, \rho)$ 分别为 M, N, K 中细图, 使 $f(U) \subset V, g(V) \subset W$, 则对局部表示有

$$\begin{aligned} (g \circ f)_{\varphi\rho} &= \rho \circ g \circ f \circ \varphi^{-1} = \rho \circ g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= g_{\psi\rho} \circ f_{\varphi\psi}, \end{aligned}$$

据 1.4.2 定理 2 知上式左边随之 $g \circ f$ 属 C^1 . 此外,

$$\begin{aligned} T(g \circ f)([c]_m) &= [g \circ f \circ c]_{g \circ f(m)}; \\ (Tg) \circ (Tf)([c]_m) &= Tg \circ ([f \circ c]_{f(m)}) \\ &= [g \circ f \circ c]_{g \circ f(m)}, \end{aligned}$$

上两式右边相等, 故得 $T(g \circ f) = (Tg) \circ (Tf)$.

2) 是定义 6 的直接推论.

3) f 及 f^{-1} 显然都是微分同胚, 且 $f \circ f^{-1}$ 为 N 上恒等映射, $f^{-1} \circ f$ 为 M 上恒等映射. 由 1) 及 2) 知 $(Tf) \circ (Tf^{-1})$ 及 $(Tf^{-1}) \circ (Tf)$ 分别是 TN 及 TM 上的恒等映射. 定理得证.

应用数学归纳法, 由 1) 可得如下结果.

推论 2 设 $f: M \rightarrow N, g: N \rightarrow K$ 都属 C^r , 则 $g \circ f$ 也属 C^r , 且有

$$T^r(g \circ f) = (T^r g) \circ (T^r f).$$

以后总等同 M 于其切丛 TM 的零截面; 等同切丛投影 $\tau_M: TM \rightarrow M$ 于切丛到零截面上的向量丛投影.

1.5.3 贯截映射

定义 7 设 M 及 N 为流形, $f: M \rightarrow N$ 属 C^1 , Q 为 N 的子流

形, 若在点 $x = f^{-1}(y) \subset f^{-1}(Q)$ 有

$$T_y N = T_y Q \oplus T_y f(M), \quad (2)$$

即称映射 f 在点 x 贯截于 Q ; 若对每点 $x \in f^{-1}(Q)$ 都如此, 则称 f 贯截于 Q , 记作 $f \pitchfork Q$. 特别若 M 及 Q 都是 N 的子流形, 且 M 到 N 中的典则内含在 $x \in M \cap Q$ 贯截于 Q , 则称 M 在点 x 贯截于 Q ; 若对每点 $x \in M \cap Q$ 都如此, 则称 M 贯截于 Q , 记作 $M \pitchfork Q$.

易知 M 在点 x 贯截于 Q 的等价定义是:

$$T_x N = T_x M + T_x Q. \quad (3)$$

定理6 若光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 贯截于子流形 $Q \subset N$, 则原象 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 为 M 的子流形, 且

$$\text{codim} f^{-1}(Q \cap f(M)) = \text{codim} Q.$$

这里 codim 记余维数, 例如: $\text{codim} Q = \dim N - \dim Q$.

证 对任一点 $y \in Q \cap f(M)$, 记 $y = f(x)$. 可在 y 的邻域中表 Q 为独立函数 g_1, \dots, g_l 的零点集, 这里 $l = \text{codim} Q$. 故在点 x 的某邻域 W 中, 原象 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 为 $g_1 \circ f, \dots, g_l \circ f$ 的零点集. 用 g 记在点 y 近旁定义的浸盖 (g_1, \dots, g_l) . 可应用 1.4.4 定理9 于映射 $g \circ f: W \rightarrow R^l$, 即当点 0 为 $g \circ f$ 的正则值时, $(g \circ f)^{-1}(0)$ 为 M 中子流形. 为证明点 $x \in f^{-1}(Q \cap f(M))$ 为正则点, 只需证 $T(g \circ f)(x)$ 或 $D(g \circ f)(x)$ 为盖射. 由于

$$D(g \circ f)(x) = Dg(y) \circ Df(x),$$

线性映射 $D(g \circ f)(x): T_x M \rightarrow R^l$ 当且仅当 $Dg(y)$ 把 $Df(x)$ 的象映射到 R^l 上时为盖射. 但 $Dg(y): T_y N \rightarrow R^l$ 为线性盖射, 且其核(即零点集)为子空间 $T_y Q$, 故 $Dg(y)$ 把 $T_y N$ 的子空间映射到 R^l 上时, 恰当此子空间 $T_y(f(M))$ 与 $T_y Q$ 一道张成整个空间 $T_y N$. 这一点正好由(2)式所保证.

至于余维数相等, 则是显然的, 因 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 和 Q 都由 l 个独立函数的零点集局部确定.

推论3 流形 N 的二贯截子流形 M 及 Q 的交仍为子流形, 且有

$$\text{codim}(M \cap Q) = \text{codim}M + \text{codim}Q.$$

事实上, 对有限维实向量空间 G 的线性子空间 E 与 F , $E \cap F \neq \emptyset$, 容易验证关系式:

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim G.$$

1.5.4 张量丛

用 $\mathcal{L}^k(E_1 \times \cdots \times E_k, F)$ 记由有限维实向量空间的直积 $E_1 \times \cdots \times E_k$ 到 F 的连续多重线性映射的集. 特别记 $E^* = \mathcal{L}(E, R)$, 称为 E 的代数对偶空间. 若 $\hat{e} = (e_1, \cdots, e_n)$ 为 E 的一组基底, 则 E^* 中存在唯一的一组对偶基底 $\hat{e}^* = (\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$, 使

$$\alpha^j(e_i) = \delta_i^j,$$

其中 δ_i^j 为Kronecker记号, $\alpha^j(e_i)$ 为对偶作用式:

$$\alpha^j(e_i) = \alpha_1^j e_i^{(1)} + \cdots + \alpha_n^j e_i^{(n)},$$

α_k^j 与 $e_i^{(k)}$ 分别是 α^j 与 e_i 的分量. 利用这两组基底, E 中每个向量 e 可表示为:

$$e = \sum_{i=1}^n \alpha^i(e) e_i.$$

E^* 中每个向量 α 则可表示为:

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i) \alpha^i.$$

可等同 $(E^*)^* \equiv E^{**} \equiv \mathcal{L}(E^*, R)$ 于 E ; 对每个 $e \in E$, 可对应于由

$$e^{**}(\alpha) = \alpha(e)$$

所确定的 $e^{**} \in E^{**}$, 这里 α 为 E^* 中任一向量. 因 E 有有限维数 n , 映射 $e \rightarrow e^{**}$ 为同构.

定义 3 记 $T_{\frac{r}{s}}^{\frac{s}{r}}(E) \equiv \mathcal{L}^{r+s}(E^* \times \cdots \times E^* \times E \times \cdots \times E, R)$, r 与 s 分别是 E^* 和 E 在直积中的重数, $T_{\frac{r}{s}}^{\frac{s}{r}}(E)$ 中元称为 **E 上具反变阶 r 、共变阶 s 的张量**, 简称为 $\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ 型张量.

据 1.4.2 定理 3 有等同关系

$$T_0^1(E) \approx E, \quad T_1^0(E) \approx E^*.$$

定理 7 设 $\dim E = n$, 则 $T_{\frac{r}{s}}^{\frac{s}{r}}(E)$ 为 n^{r+s} 维的实向量空间.

若 $\hat{e} = (e_1, \dots, e_n)$ 为 E 的一组基底, 则 $T_{\frac{r}{s}}^{\frac{s}{r}}(E)$ 有基底:

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{j_s}, \quad 1 \leq i_k, j_l \leq n, \\ 1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s\}, \quad (4)$$

其中 $\hat{e}^* = (\alpha^1, \dots, \alpha^n)$ 为 \hat{e} 的对偶基底.

证 应证 (4) 式中张量线性无关, 且张成 $T_{\frac{r}{s}}^{\frac{s}{r}}(E)$. 用反证法而设 (4) 式中元线性相关:

$$\sum_{i_k, j_l} f_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes \alpha^{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha^{j_s} = 0. \quad (5)$$

和 \sum_{i_k, j_l} 乃对所有 i_k, j_l 而取, $1 \leq i_k, j_l \leq n, 1 \leq k \leq r, 1 \leq l \leq s$. 把

(5) 式的左边作用于任一固定向量 $(\alpha^{k_1}, \dots, \alpha^{k_r}, e_{i_1}, \dots, e_{i_s})$,

由于 $e_i(\alpha^j) = \alpha^j(e_i) = \delta_{ij}$, 得:

$$f_{j_1 \dots j_s}^{k_1 \dots k_r} = 0,$$

但 k_i, l_j 为任意的, 故(5)式中所有系数 $t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = 0$. 这表明(4)式中元不可能是线性相关的. 其次, 对任一张量 $t \in T_s^r(E)$, 总可得表示式:

$$t = \sum t(a^{i_1}, \dots, a^{i_r}; e_{j_1}, \dots, e_{j_s}) e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes a^{j_1} \otimes \dots \otimes a^{j_s}, \quad (6)$$

故(4)式确张成 $T_s^r(E)$. 最后, (4)式显然作成 n^{r+s} 维向量空间的基底.

系数

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \equiv t(a^{i_1}, \dots, a^{i_r}; e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$$

称为张量 t 关于基底(4)的分量.

可定义张量 $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$ 及 $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$ 的张量积 $t_1 \otimes t_2$ 如下作用:

$$\begin{aligned} & t_1 \otimes t_2(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}; \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}; f_1, \dots, f_{s_1}; g_1, \dots, g_{s_2}) \\ &= t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}; f_1, \dots, f_{s_1}) t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}; g_1, \dots, g_{s_2}), \end{aligned}$$

其中 $\beta^i, \gamma^j \in E^*$, $f_k, g_l \in E$. 显然有 $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(E)$.

定义9 设 $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ 为 E 与 F 间的线性同构, 定义 $T_s^r \varphi \equiv \varphi_s^* \in \mathcal{L}(T_s^r(E), T_s^r(F))$ 如下:

$$\begin{aligned} & (\varphi_s^* t)(\beta^1, \dots, \beta^r; f_1, \dots, f_s) \\ &= t(\varphi^*(\beta^1), \dots, \varphi^*(\beta^r); \varphi^{-1}(f_1), \dots, \varphi^{-1}(f_s)), \\ & \beta^1, \dots, \beta^r \in F^*, f_1, \dots, f_s \in F, \quad \forall t \in T_s^r(E), \end{aligned}$$

其中 $\varphi^* \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$, 称为由 φ 引出的拖射而以如下方式定义

$\varphi^*(\beta) \cdot e = \beta(\varphi(e)) = (\beta \circ \varphi)(e), \quad \forall e \in E, \quad \forall \beta \in F^*.$
 φ^* 的逆 $\varphi_* = (\varphi^*)^{-1} \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, 则称为推射.

不难核验如下关系

$$\varphi_!^0 = (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1} = \varphi_*;$$

$$\varphi_*(\alpha) \cdot f = (\alpha \circ \varphi^{-1})(f), \quad \forall f \in F, \alpha \in E^*,$$

并可等同 φ 与 $\varphi_!$.

定理8 设 $\varphi: E \rightarrow F$, $\psi: F \rightarrow G$ 都是线性同构, 则有:

- 1) $(\psi \circ \varphi)_!^* = \psi_!^* \circ \varphi_!^*$ 即 $\varphi_!^*$ 为共变函子;
- 2) 若 $I: E \rightarrow E$ 为恒等映射, 则 $I_!^*: T_!^*(E) \rightarrow T_!^*(E)$ 也是恒等映射;

- 3) $\varphi_!^*: T_!^*(E) \rightarrow T_!^*(F)$ 也是线性同构, 且

$$(\varphi_!^*)^{-1} = (\varphi^{-1})_!^*.$$

证 1) 据定义9有:

$$\begin{aligned} & \varphi_!^*(\varphi_!^* t)(\gamma^1, \dots, \gamma^r; g_1, \dots, g_s) \\ &= (\varphi_!^* t)(\psi^*(\gamma^1), \dots, \psi^*(\gamma^r); \psi^{-1}(g_1), \dots, \psi^{-1}(g_s)) \\ &= t(\varphi^* \psi^*(\gamma^1), \dots, \varphi^* \psi^*(\gamma^r); \varphi^{-1} \psi^{-1}(g_1), \dots, \varphi^{-1} \psi^{-1}(g_s)) \\ &= t((\psi \circ \varphi)^*(\gamma^1), \dots, (\psi \circ \varphi)^*(\gamma^r); (\psi \circ \varphi)^{-1}(g_1), \dots, \\ & \quad (\psi \circ \varphi)^{-1}(g_s)) \\ &= (\psi \circ \varphi)_!^* t(\gamma^1, \dots, \gamma^r; g_1, \dots, g_s), \quad \forall t \in T_!^*(E), \end{aligned}$$

$\gamma^1, \dots, \gamma^r \in G^*, g_1, \dots, g_s \in G$. 至于关系式

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \quad (\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1},$$

易于直接核验.

- 2) 是定义9及显然的关系式 $I^* = I, I^{-1} = I$ 的推论.

- 3) 由1)及2)有 $\varphi_!^* \circ (\varphi^{-1})_!^* = I_!^*$, 右边是 $T_!^*(F)$ 上的恒等映射; 同样可得 $T_!^*(E)$ 上恒等映射: $(\varphi^{-1})_!^* \circ \varphi_!^* = I_!^*$. 由此即得3).

定义10 设 U 为有限维实向量空间 E 的开集, 称 $U \times$

$T^r_s(E)$ 为局部张量丛. 一般地, 设 $\pi: E \rightarrow B$ 为向量丛, $E_b = \pi^{-1}(b)$ 为 $b \in B$ 上纤维. 定义

$$T^r_s(E) = \bigcup_{b \in B} T^r_s(E_b); \quad \pi^r_s(E): T^r_s(E) \rightarrow B; \pi^r_s(e) = b, \\ e \in T^r_s(E_b)$$

对 B 的子集 A , 令

$$T^r_s(E)|_A = \bigcup_{b \in A} T^r_s(E_b).$$

若特别取向量丛 $\pi: E \rightarrow B$ 为切丛 $\tau_M: TM \rightarrow M$, M 为给定流形, 记

$$T^r_s(M) \equiv T^r_s(TM)$$

而称为 $\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ 型张量丛, 其中 $T^0_1(M)$ 称为余切丛, 记作:

$$\tau^*_M: T^*M \rightarrow M.$$

因 E^{**} 可等同于 E , 故 $T^0_1(M)$ 可等同于切丛 TM . 因 TM 的零截面可等同于 M , 故 $T^0_1(M)$ 的零截面也等同于 M .

定义 11 $T^r_s(M)$ 的 C^∞ 截面称为流形 M 上的 $\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$ 型张量场. 用 $\mathcal{T}^r_s(M)$ 记截面集 $\Gamma^\infty(T^r_s(M))$, 并附以 (无限维) 实向量空间结构. 用 $\mathcal{F}(M)$ 记 M 到 R 的所有 C^∞ 映射, 并附以环结构:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x); \quad (cf)(x) = cf(x);$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M), \quad \forall c \in R.$$

特别记 $\mathcal{X}(M) \equiv \mathcal{T}^1_0(M)$, 其中元为 M 上向量场; $\mathcal{X}^*(M) \equiv \mathcal{T}^0_1(M)$ 中元称为 M 上余向量场.

特别重要且最常用到的是切丛与余切丛、向量场与余向量场.

1.5.5 Lie 导数

在流形 M 上一点 m 的切空间 $T_m M$, 任一切向量 (切向导数)

在相应细图的局部坐标 (x_1, \dots, x_n) 下显然可表示为

$$X = \left(X^1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X^n \frac{\partial}{\partial x_n} \right),$$

即 $T_m M$ 以 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ 作成自然基底, 故其对偶基底为

$$\widehat{e}^* = (dx_1, \dots, dx_n); \quad dx_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \delta_i^i,$$

\widehat{e}^* 是余切空间 $T_m^* M$ 的自然基底.

定义12 设 $f \in \mathcal{F}(M)$, 这时 $Tf: TM \rightarrow TR = R \times R$. 记

$$T_m f = Tf|_{T_m M} \in \mathcal{L}(T_m M, \{f(m)\} \times R), \quad m \in M.$$

用 P_2 记由 T^*M 到其第二因子空间(纤维)的投影, 定义

$$df: M \rightarrow T^*M; \quad df(m) = P_2 \circ T_m f, \quad (7)$$

而称 df 为 f 的微分. 对 $X \in \mathcal{X}(M)$, 定义

$$L_X f: M \rightarrow R; \quad L_X f(m) = df(m) \cdot [X(m)], \quad (8)$$

而称 $L_X f$ 为 f 沿向量 X 的Lie导数.

根据关于 $T_m M$ 中自然基底的讨论, 知有

$$df(m) = P_2 \circ T_m f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right),$$

$$L_X f(m) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \cdot \left(X^1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, X^n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

故在局部坐标下, f 沿 X 的Lie导数与通常的沿 X 的方向导数一致.

附带提到, Lie导数还可用如下方式定义.

对 $X \in \mathcal{X}(M)$, 由常微分方程组初值问题

$$\sigma' \equiv \frac{d}{dt} \sigma(t, x) = X(\sigma), \quad \sigma(0, x) = x \in M$$

确定 $\sigma(t, x)$, 定义

$$L_X f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\sigma(t, x)) - f(x)], \quad f \in \mathcal{F}(M);$$

$$L_X Y|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} (Y(\sigma(t, x)) - Y(x)) \right] / t, \quad Y \in \mathcal{X}(M),$$

$$L_X \omega|_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\sigma^*(\omega(\sigma(t, x))) - \omega(x)], \quad \omega \in \mathcal{X}(M),$$

这里 σ^* 为由 σ 引出的拖射: $(\sigma^* \omega) \cdot X = \omega(\sigma' X) \circ \sigma$.

可核验这样定义的 $L_X f(x)$ 与 (8) 式一致; 还可算出

$$L_X Y = X \circ Y - Y \circ X \equiv [X, Y],$$

而称为 X 与 Y 的 Lie 括号。

1.6 定向流形

1.6.1 外代数

定义1 设 E 为有限维实向量空间。记

$$\Omega^0(E) \equiv R; \quad \Omega^1(E) \equiv E^*; \quad \Omega^k(E) \equiv \mathcal{L}_k^k(E, R),$$

$$k = 2, 3, \dots,$$

\mathcal{L}_k^k 是 E 上斜对称 k 重线性有界映射的集, 见 1.4.2. $\Omega^k(E)$ 中元称为 k 型式。

$\Omega^k(E)$ 是 $T_k^0(E)$ 的子空间。

定义2 交替映射 $A: T_k^0(E) \rightarrow T_k^0(E)$ 定义如下:

$$At(e_1, \dots, e_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn} \sigma) t(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}),$$

S_k 是 k 个数 $(1, 2, \dots, k)$ 的排列群, 由所有排列

$$\sigma: (1, \dots, k) \rightarrow (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$$

组成, 其阶 $k!$; 式中的和乃对 S_k 中 $k!$ 个元作和, $\operatorname{sgn} \sigma$ 见 1.4.2 注 2.

定理 1 A 为由 $T_k^0(E)$ 到 $\Omega^k(E)$ 上的线性映射, $A|_{\Omega^k(E)}$ 为恒等映射, 且 $A \circ A = A$.

证 线性是显然的. 若 $t \in \Omega^k(E)$, 因 $(\operatorname{sgn} \sigma)^2 = 1$ 且 S_k 的阶为 $k!$, 故有:

$$\begin{aligned} At(e_1, \dots, e_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma) t(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma)^2 t(e_1, \dots, e_k) = t(e_1, \dots, e_k), \end{aligned}$$

$\forall t \in \Omega^k(E),$

即 $A|_{\Omega^k(E)}$ 为恒等算子. 其次, 对 $t \in T_k^0(E)$, 因 $\sigma \rightarrow \sigma\tau$ 为双射且 $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn} \sigma \operatorname{sgn} \tau$, 有

$$\begin{aligned} At(e_1, \dots, e_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sgn} \sigma\tau) t(e_{\sigma\tau(1)}, \dots, e_{\sigma\tau(k)}) \\ &= (\operatorname{sgn} \tau) \sum_{\sigma} \frac{\operatorname{sgn} \sigma}{k!} t(e_{\sigma\tau(1)}, \dots, e_{\sigma\tau(k)}) \\ &= (\operatorname{sgn} \tau) At(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(k)}), \end{aligned}$$

故 $At \in \Omega^k(E)$. 这就证得定理的前二断言; 最后的断言 ($A \circ A = A$) 是这两个断言的直接结果.

定义 3 设 $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$, 定义其楔积或外积为:

$$\alpha \wedge \beta \equiv A(\alpha \otimes \beta) \in \Omega^{k+l}(E).$$

特别对 $\alpha \in T_0^0(E) = R$, 令

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha = \alpha \beta.$$

注意即令当 $\alpha \in \Omega^k(E)$, $\beta \in \Omega^l(E)$, 张量积 $\alpha \otimes \beta$ 一般不属于 $\Omega^{k+l}(E)$.

定理2 设 $\alpha \in T_k^0(E)$, $\beta \in T_l^0(E)$, $\gamma \in T_m^0(E)$, 则有:

- 1) $\alpha \wedge \beta = A\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge A\beta$;
- 2) 运算 \wedge 为双线性的与结合的;
- 3) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha$.

证 1) 先证 $A(\sigma t) = (\text{sgn } \sigma) At$, 这里 $\sigma t: t(e_1, \dots, e_k) \rightarrow t(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)})$. 事实上, 因 $\rho \rightarrow \rho\sigma$ 为双射, 有:

$$\begin{aligned} A(\sigma t) &= \frac{1}{k!} \sum_{\rho} (\text{sgn } \rho) t(e_{\rho\sigma(1)}, \dots, e_{\rho\sigma(k)}) \\ &= \sum_{\rho} \frac{\text{sgn } \sigma}{k!} (\text{sgn } \rho\sigma) t(e_{\rho\sigma(1)}, \dots, e_{\rho\sigma(k)}) \\ &= (\text{sgn } \sigma) At(e_1, \dots, e_k). \end{aligned}$$

其次, 因 A 为线性映射, 故得

$$\begin{aligned} &A(A\alpha \otimes \beta)(e_1, \dots, e_k, \dots, e_{k+l}) \\ &= A \left[\sum_{\tau} \frac{\text{sgn } \tau}{k!} \alpha(e_{\tau(1)}, \dots, e_{\tau(k)}) \otimes \beta(e_{k+1}, \dots, e_{k+l}) \right] \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{\tau} (\text{sgn } \tau) A(\tau\alpha \otimes \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}). \end{aligned}$$

取 $\tau' \in S_{k+l}$ 使

$$\tau'(1, \dots, k, \dots, k+l) = (\tau(1), \dots, \tau(k), k+1, \dots, k+l),$$

则因 $\text{sgn } \tau = \text{sgn } \tau'$ 且 $\tau\alpha \otimes \beta = \tau'(\alpha \otimes \beta)$, 前式取形

$$\begin{aligned} &\sum_{\tau} \frac{(\text{sgn } \tau)^2}{k!} A(\alpha \otimes \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}) \\ &= A(\alpha \otimes \beta)(e_1, \dots, e_{k+l}), \end{aligned}$$

故得 $\alpha \wedge \beta = A\alpha \wedge \beta$. 同样可得 $\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge A\beta$.

2) 因运算 \otimes 为双线性的而 A 为线性的, 故 \wedge 为双线性的; 其次, 可直接核验

$$\begin{aligned}\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= \alpha \wedge A(\beta \otimes \gamma) = A(\alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)) \\ &= A((\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma) = A(\alpha \otimes \beta) \wedge \gamma = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma\end{aligned}$$

3) 设 $\sigma_0(1, \dots, k+l) = (k+1, \dots, k+l, 1, \dots, k)$, 则有

$$\alpha \otimes \beta(e_1, \dots, e_{k+l}) = \beta \otimes \alpha(e_{\sigma_0(1)}, \dots, e_{\sigma_0(k+l)}),$$

故由1)的证明过程知 $A(\alpha \otimes \beta) = (\operatorname{sgn} \sigma_0) A(\beta \otimes \alpha)$, 但因 $\operatorname{sgn} \sigma_0 = (-1)^{kl}$, 由此即得3).

定义4 空间列 $\{\Omega^k(E), k=0, 1, \dots\}$ 的直和 $\Omega(E) = \bigoplus \Omega^k(E)$, 附以实向量空间结构及外积, 称为 E 上的外代数或 Grassmann 代数.

定理3 设 $\dim E = n$, 则对 $k > n$ 有 $\Omega^k(E) = \{0\}$, 而对 $0 \leq k \leq n$ 有 $\dim \Omega^k(E) = \binom{n}{k}$, 故 $\dim \Omega(E) = 2^n$. 若 $\hat{e} = (e_1, \dots, e_n)$ 为 E 的基底, $\hat{e}^* = (a^1, \dots, a^n)$ 为对偶基底, 则 $\Omega^k(E)$ 的基底是:

$$\{a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k}; 0 \leq k \leq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}. \quad (1)$$

证 设 $t \in \Omega^k(E)$, 据1.5.4定理8及本节定理1有

$$t = \sum t(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k}.$$

但若 $\sigma \in S_k$ 且 i_1, \dots, i_k 固定, 由定理2得:

$$t(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k}$$

$$= t(e_{\sigma(i_1)}, \dots, e_{\sigma(i_k)}) a^{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge a^{\sigma(i_k)}.$$

故只需对不同的 $\{i_1, \dots, i_k\}$ 作和并附以因子 $k!$:

$$t = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} t(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k},$$

即任何 $t \in \Omega^k(E)$ 可用(1)式中元表出。现在应证(1)式中元线性无关。设不, 则有:

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} t_{i_1, \dots, i_k} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k} = 0.$$

对任一组固定的 i'_1, \dots, i'_k , 记其指标余集为 i'_{k+1}, \dots, i'_n , 仍按增序排列, 即 $j'_{k+1} < \dots < j'_n$. 于是有

$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} t_{i_1, \dots, i_k} a^{i_1} \wedge \dots \wedge a^{i_k} \wedge a^{i'_{k+1}} \wedge \dots \wedge a^{i'_n} = 0,$$

由定理 2 中 3) 知 $a^i \wedge a^i = 0$, 故上式只剩下

$$t_{i'_1, \dots, i'_k} a^{i'_1} \wedge \dots \wedge a^{i'_k} = 0.$$

下面将证明 $a^{i'_1} \wedge \dots \wedge a^{i'_k} \neq 0$, 故 $t_{i'_1, \dots, i'_k} = 0$; 但 i'_1, \dots, i'_k 为任意的,

由此知线性相关的假定是错误的。定理的其余部分可由组合计算而得。

1.6.2 体元和行列式·定向性

定义5 一维空间 $\Omega^n(E)$ 的非零元称为 E 中体元。若 ω_1 及 ω_2 为二体元, 则当且仅当存在正数 C 使 $\omega_1 = C\omega_2$ 时, 二体元称为等价的。 E 上体元的一个等价类称为 E 上一种定向。

定理4 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in E^*$, 则它们当且仅当

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k = 0 \quad (2)$$

时为线性相关的。

证 若它们线性相关, 则对某个 $i \in \{1, \dots, k\}$ 有

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} c_j \alpha_j,$$

因 $\alpha_i \wedge \alpha_j = 0$, 把 α_i 的如上表示代入(2)式的左边, 即知(2)式成立. 反之, 若 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性无关, 可补充而得 E^* 中基底 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. 下面将证明 $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n \neq 0$, 故 $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \neq 0$; 这表明(2)式确是 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ 线性相关的充分条件.

定理5 对 $\varphi \in \mathcal{L}(E, E)$, 存在唯一的常数 $\det \varphi$, 称为映射 φ 的行列式, 使由 φ 引出的拖射

$$\begin{aligned} \varphi^*: \varphi^* \omega(e_1, \dots, e_n) &= \omega(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)); \\ \Omega^n(E) &\rightarrow \Omega^n(E) \end{aligned}$$

对所有的 $\omega \in \Omega^n(E)$ 具性质

$$\varphi^* \omega = (\det \varphi) \omega. \quad (3)$$

证 据定理3知 $\Omega^n(E)$ 为一维空间, 故若 ω_0 为基底及 $\omega = c\omega_0$, 即有 $\varphi^* \omega = c\varphi^* \omega_0 = K\omega$, K 为常数, 且显然唯一确定. 由此特别得出

$$\omega_0 = \alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n \neq 0,$$

记 $K = \det \varphi$, 知定理成立.

定理6 设 $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, E)$, 则有:

- 1) $\det(\varphi \circ \psi) = (\det \varphi) \cdot (\det \psi)$;
- 2) 若 φ 为恒等映射, 则 $\det \varphi = 1$;
- 3) φ 当且仅当 $\det \varphi \neq 0$ 时为同构; 这时

$$\det(\varphi^{-1}) = (\det \varphi)^{-1},$$

证 1) 据定义知 $(\varphi \circ \psi)^* \omega = \det(\varphi \circ \psi) \omega$, 但易核验

$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = (\psi^* \circ \varphi^*) \omega,$$

故有

$$(\varphi \circ \psi)^* \omega = \psi^*(\det \varphi) \omega = (\det \psi)(\det \varphi) \omega = \det(\varphi \circ \psi) \omega.$$

2) 是行列式定义的显然结果;

3) 设 φ 为同构, φ^{-1} 为其逆, 则由 1)、2) 有:

$$1 = \det(\varphi \circ \varphi^{-1}) = (\det \varphi)(\det \varphi^{-1}),$$

由此特别得 $\det \varphi \neq 0$. 反之, 若 φ 不为同构, 则存在 $e_1 \neq 0$, 使 $\varphi(e_1) = 0$. 对 e_1 补充得 E 中基底 e_1, \dots, e_n , 而得 n 型式 $\omega \in \Omega^n(E)$, 使

$$\varphi^* \omega(e_1, \dots, e_n) = \omega(0, \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)) = 0,$$

于是 $\det \varphi = 0$. 定理得证.

1.6.3 外微分型式

定义6 设 $\pi: E \rightarrow B$ 为向量丛, 记

$$\omega^k(E)|_A = \bigcup_{b \in A} \Omega(E_b),$$

其中 A 为 B 的子集, $E_b = \pi^{-1}(b)$ 为沿 $b \in B$ 的纤维. 记

$$\omega^k(E) = \omega^k(E)|_B,$$

并定义当且仅当 $t \in \Omega^k(E_b)$ 时, $\omega^k(\pi): \omega^k(E) \rightarrow B; \omega^k(\pi)(t) = b$. 特别对于切丛 $\tau_M: TM \rightarrow M$, 记

$$\omega^k(M) \equiv \omega^k(TM); \quad \omega_M^k \equiv \omega^k(\tau_M),$$

于是 $\omega_M^k: \omega^k(M) \rightarrow M$ 为流形 M 的切空间上的外 k 型式的向量丛. 特别记

$$\Omega^0(M) \equiv \mathcal{F}(M); \quad \Omega^1(M) \equiv \mathcal{F}_1^1(M),$$

$$\Omega^k(M) \equiv \Gamma^\infty(\omega_M^k), \quad k = 2, 3, \dots.$$

记 $\Omega^k(M)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 的直和为 $\Omega(M)$, 附以实向量空间结构及外积, 而称为 M 上的外微分型式代数. $\Omega^k(M)$ 中元称为 k 微分型式; 特别, $\mathcal{X}^*(M) \equiv \Omega^1(E)$ 中元称为 1 微分型式或简称 1 型式.

通常把 $\Omega(M)$ 作为实数域上的向量空间, 而不作为环 $\mathcal{F}(M)$ 上的模, 因 $\mathcal{F}(M) = \Omega^0(E)$ 含于直和内, 且

$$f \wedge \alpha = f \otimes \alpha = f\alpha.$$

下面求出 $\Omega(M)$ 中元的局部表示, 用以揭示外微分型式命名的来历.

设 (U, φ) 为 M 上细图, 使 $U' = \varphi(U) \subset R^n$. 记 R^n 的基底为 e_i , 令

$$\underline{e}_i(u) = (T_{\varphi(u)}\varphi)^{-1}(\varphi(u), e_i) = (u, T\varphi \cdot e_i), \quad \forall u \in U.$$

类似地, 记 α^i 为 e_i 的对偶基底, 令

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}^i(u) &= (T_u\varphi)_*(\varphi(u), \alpha^i) = (\varphi^{-1}\varphi(u), (T\varphi)^{-1}\alpha^i) \\ &= (u, (T\varphi)^{-1}\alpha^i), \end{aligned}$$

故对每个 $u \in U$, $\underline{e}_i(u), \underline{\alpha}^i(u)$ 作成纤维 $T_u M$ 上的对偶基底组.

若 $\varphi(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u)) \in R^n$, 在点 $u \in U$ 定义

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv L_{e_i} f = df[\underline{e}_i(u)] = \frac{\partial f_{\varphi}}{\partial x_i} \circ \varphi^{-1}, \quad f_{\varphi} = f \circ \varphi, \quad (4)$$

于是有

$$\underline{\alpha}^i(u) = dx_i(u). \quad (5)$$

事实上(参看1.5.5),

$$\begin{aligned} dx_i(u)(\underline{e}_j(u)) &= P_z \circ T_u x_i \circ T_{\varphi(u)} \varphi^{-1}(\varphi(u), e_j) \\ &= P_z T_u (x_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(u), e_j) = D(x_i \circ \varphi^{-1})(\varphi(u)) \cdot e_j \\ &= Dx_i \cdot e_j = \delta_j^i, \end{aligned}$$

因 $Dx_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 在第 i 个位置, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, 1 在第 j 个位置. 由此即得(5)式; 随之得 df 在基底 $\underline{\alpha}^i$ 下的表示为:

$$df(u) = \sum_i df(\underline{e}_i) \underline{a}^i(u) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(u) dx_i(u).$$

同样, 对 $i \in \mathcal{I}^+(U)$, 有(以下记 x_i 为 x^i),

$$t(u) = \sum_{j_1, \dots, j_r} t_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r}(u) e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_r} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_r},$$

$$t_{j_1, \dots, j_r}^{i_1, \dots, i_r} = t(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}; e_{j_1}, \dots, e_{j_r}).$$

而对每个 $\omega \in \Omega^k(U)$, 则有:

$$\omega(u) = k! \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

$$\omega_{i_1, \dots, i_k} = \omega(\underline{e}_{i_1}, \dots, \underline{e}_{i_k}).$$

这就是 Ω^k 中元被称为外微分 k 型式的来历.

定理7 设 M 为流形. 存在唯一映射 d :

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U), \quad k = 0, 1, \dots,$$

其中 U 为 M 的开子集. d 称为外微分运算, 具下列性质:

1) d 是 \wedge -反引射, 即关于实数域 R 为线性的 (简称 R 线性) 且使

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

$$\forall \alpha \in \Omega^k(U), \quad \forall \beta \in \Omega^1(U);$$

注1 映射 $D: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$, 若为 R 线性且使

$$D(fg) = (Df)g + fDg, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M);$$

即称为 $\mathcal{F}(M)$ 上的引射.

$$2) \quad df = d f, \quad \forall f \in \mathcal{F}(U).$$

$$3) \quad d^2 \equiv d \circ d = 0.$$

证 先证唯一性. 由 R 线性及定理 3 只需对

$$\omega = f_0 df_1 \wedge \dots \wedge df_k, \quad f_i \in \mathcal{F}(U)$$

证明 由性质 1)–3) 有:

$$d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \in \Omega^{k+1}(U),$$

而唯一确定。至于存在性，对 $\omega = f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \in \Omega^k(U)$ ，定义

$$d\omega = df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \in \Omega^{k+1}(U),$$

它显然与细图的选取无关。性质2)是显然的， R 线性亦然。为证1)，注意若 $\rho = g_0 dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_l$ ，则

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \rho) &= d(f_0 g_0) \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \wedge dg_1 \wedge \cdots \wedge dg_l \\ &= g_0 df_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k + f_0 dg_0 \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \\ &= (d\omega) \wedge \rho + (-1)^k \omega \wedge d\rho. \end{aligned}$$

最后，为证明3)，只需对 $f \in \mathcal{F}(M)$ 核验 $d \circ df = 0$ 。但在细图

中有 $df(u) = \sum_i Df(u) \cdot e_i dx^i$ ，故得：

$$\begin{aligned} d \circ df(u) &= D \circ Df(u) \cdot \sum_{i,j} (e_i, e_j) dx^i \wedge dx^j \\ &= D^2 f(u) \sum (e_i, e_j) (dx^i \wedge dx^j + dx^j \wedge dx^i) = 0. \end{aligned}$$

这里用到性质 $D^2 f \in \mathcal{L}_0^2(E, R)$ ，即

$$D_i D_j f(u)(e_i, e_j) = D_j D_i f(u)(e_i, e_j).$$

定理证毕。

推论1 设 $\omega \in \Omega^k(U)$ ， U 为 E 中开集，则有：

$$d\omega(u)(e_0, \cdots, e_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i D\omega(u)e_i(e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_k),$$

其中 $\widehat{e_i}$ 表示 e_i 应去掉；即 $(e_0, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_k) = (e_0, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_k)$ ；在上式中还把 TU 中元 (u, e) 简记为 e 。

证 只需核验由上式右边定义的 d 具定理3中性质1)–3)，再利用唯一性。核验过程与定理3的证明过程完全类似。

为书写方便,以后换粗体 d 为通常的 d .

定义7 设 $F: M \rightarrow N$ 为流形间的 C^∞ 映射,对 $\omega \in \Omega^k(N)$ 定义由 F 引出的拖射 F^* 如下:

$$F^*: \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M); F^*\omega(m) = (T_m F)^* \circ \omega \circ F(m), \\ m \in M.$$

特别若 $g \in \Omega^0(N)$,则 $F^*g = g \circ F$.若 F^{-1} 也属 C^∞ ,定义推射

$$F_*: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N); F_* = (F^*)^{-1} = (F^{-1})^*.$$

定义8 若 $d\omega = 0$,微分型式 $\omega \in \Omega^k(E)$ 称为闭的,若存在 $\alpha \in \Omega^{k-1}(E)$,使 $\omega = d\alpha$,则 ω 称为正合的.

定理8 1) 每个正合型式为闭的.

2) (Poincaré引理) 若 ω 为光滑的闭型式,则对每点 $m \in M$,存在邻域 U ,使 $\omega|_U \in \Omega^k(U)$ 为正合的.

证 因 $d^2 = 0$, 1)是显然的.为证2),不妨取 U 为含点 $0 \in E$ 的球,而在 m 的局部坐标下考虑.在 R 上构造 R 线性映射 $H: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k-1}(U)$,使 $d \circ H + H \circ d$ 为 $\Omega^k(U)$ 上恒等映射.由 $d\omega = 0$ 引出 $d(H\omega) = \omega$,即可得2).对 $e_1, \dots, e_k \in E$,定义

$$(H\omega(u))(e_1, \dots, e_{k-1}) = \int_0^1 t^{k-1} (\omega(tu))(u, e_1, \dots, e_{k-1}) dt,$$

由推论1有

$$\begin{aligned} & dH\omega(u) \cdot (e_1, \dots, e_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} D[H\omega(u)] \cdot e_i(e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k) \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_0^1 t^{k-1} \omega(tu)(e_1, e_i, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k) dt + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \int_0^1 t^k [D\omega](tu) e_i(u, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k) dt,$$

由于 ω 光滑且对 $t \in [0, 1]$ 有界, D 和 \int 的交换是容许的. 但由推论 1 知

$$\begin{aligned} Hd\omega(u)(e_1, \dots, e_k) &= \int_0^1 t^k d\omega(tu)(u, e_1, \dots, e_k) dt \\ &= \int_0^1 t^k (D\omega)(tu) \cdot u(e_1, \dots, e_k) dt \\ &\quad + \sum_{i=1}^k (-1)^i \int_0^1 t^k D\omega(tu) e_i(u, e_1, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_k) dt. \end{aligned}$$

上式右边第二项和正好与前式右边第二项和抵消, 故得

$$\begin{aligned} &[(dH)\omega(u) + Hd\omega(u)](e_1, \dots, e_k) \\ &= \int_0^1 t^{k-1} k\omega(tu)(e_1, \dots, e_k) dt + \int_0^1 t^k D\omega(tu)u(e_1, \dots, e_k) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} [t^k \omega(tu)(e_1, \dots, e_k)] dt = \omega(u) \cdot (e_1, \dots, e_k), \end{aligned}$$

故所需 H 存在, 于是2)得证.

若不要求 ω 光滑, 则闭型式而非正合型式的例是

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

定义9 对流形 M 上的闭 k 型式引进等价类. 若二闭 k 型式 ω 及 ω' 的差为正合的, 即若 $\omega - \omega' = d\theta$, 即称此二型式为上同调的, 记作 $\omega \sim \omega'$. 上同调显然作成等价关系. 记所有上同调等价类的集为 $H^k(M)$, 它显然作成加群, 而称为 M 上的 k 次上同调群.

注1 下面引述有关上同调群的一些结果:

- 1) 若 $k > \dim M$, 则 $H^k(M) = \{0\}$;
- 2) $H^0(M)$ 的阶数等于 M 的连通分集的个数;
- 3) 若 $k > 0$, 则 $H^k(R^n) = \{0\}$;
- 4) $\dim H^k(S^n) = \begin{cases} 1, & k=0, n \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases}$, S^n 为 n 维单位球面.

1.6.4 可定向流形

定义10 流形 M 上的单位分解是集 $\{(U_i, \varphi_i, g_i)\}$, 而满足下列要求:

PU1 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 为 M 上图集, $\{U_i\}$ 为 M 的局部有限开覆盖;

PU2 $g_i \in \mathcal{F}(M)$, $g_i \geq 0$, $\text{supp } g_i \equiv Cl\{x: g_i(x) \neq 0, x \in M\}$ 为紧集并含于 U_i , 这里 $Cl\{\cdot\}$ 表示集 $\{\cdot\}$ 的闭包; 且对

每一点 $m \in M$, 有 $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(m) = 1$, $\text{supp } g$ 称 g 的台.

定理9 任一流形 M 上总存在单位分解.

证 因流形 M 为次紧空间 (见1.1.4), 故总存在图集 \mathcal{A} , 容许局部有限的加细 $\{(V_i, \varphi_i)\}$. 对任一点 $m \in M$, 总可取细图 (U, φ) , 使 $U' = \varphi(U) \subset R^n$ 含以 $\varphi(m) = 0$ 为心、2 为半径的球 (必要时经平移及放大, 总可达到目的). 记

$$\theta(x) = \begin{cases} \exp\{-(1-|x|^2)^{-1}\}, & |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1; \\ 0 & , |x| \geq 1. \end{cases}$$

作函数

$$h(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1; \\ \theta(|x|-1), & 1 < |x| < 2; \\ 0 & , |x| \geq 2. \end{cases}$$

显然, 函数 $h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ 对充分小的 $\varepsilon > 0$ 具任意小的紧台, 于是

$h\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \circ \varphi^{-1} = f(m)$ 为 $\mathcal{F}(M)$ 中元, 且具紧台. 因此, 对每个

i 有 $f_i \in \mathcal{F}(M)$, $\text{supp } f_i \subset V_i$. 令

$$g_i(m) = f_i(m) / \sum_i f_i(m), \quad i = 1, 2, \dots,$$

即得所求单位分解(注意由于 $\{V_i\}$ 的局部有限性, 对每个固定的 $m \in M$, $\sum_i f_i(m)$ 实际是有限和).

定义11 n 维流形 M 上的体元是 n 型式 $\Omega \in \Omega^n(M)$, 而使 $\Omega(m) \neq 0$, $m \in M$. 若 M 上存在体元, 即称 M 为可定向流形. 对二体元 Ω_1 及 Ω_2 , 若存在 $f \in \mathcal{F}(M)$, 使对所有 $m \in M$ 有 $f(m) > 0$ 且 $\Omega_1 = f\Omega_2$, 即称此二体元为等价的. 它显然作成等价关系. M 上体元的一个等价类 $[\Omega]$ 称为 M 的一种定向. 由标准体元

$$\Omega_0 \equiv dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

所在等价类确定的定向, 称为 M 的正定向 $[\Omega_0]$. 定向流形 $(M, [\Omega])$ 是可定向流形 M 附以定向 $[\Omega]$. 若 $[\Omega]$ 为 M 的一种定向, 则 $[-\Omega]$ 称为其逆定向. 特别, $[\Omega_0]$ 的逆定向称为负定向.

定理10 设 M 为 n 维流形, 则有:

1) 当且仅当 $\Omega^n(M)$ 作为 $\mathcal{F}(M)$ 为一维时, M 可定向(回忆环 \mathcal{A} 上的模 M 与域 K 的向量空间 E 的区别是: 环 \mathcal{A} 不必有单元);

2) 当且仅当 M 有一图集 $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$, 其中 $\varphi_i: U_i \rightarrow U'_i \subset \mathbb{R}^n$, 使迭合映射 $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ 的 Jacobi 行列式取正值时, M 可定向.

证 1) 设 M 可定向, 故有体元 Ω . 取 $\Omega^n(M)$ 中任一其它体元 Ω' . 因 $\Omega^n(M)$ 的纤维为一维的, 可由

$$\Omega'(m) = f(m)\Omega(m)$$

定义映射 $f: M \rightarrow R$. 应证 $f \in \mathcal{F}(M)$. 在局部坐标下,

$$\Omega'(m) = \omega_{i_1, \dots, i_n}^f(m) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n};$$

$$\Omega(m) = \omega_{i_1, \dots, i_n}(m) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_n},$$

但对所有 $m \in M$, $\omega_{i_1, \dots, i_n}(m) \neq 0$, 故

$$f(m) = \omega_{i_1, \dots, i_n}^f(m) / \omega_{i_1, \dots, i_n}(m) \text{ 属 } C^\infty.$$

反之, 若 $\Omega^n(M)$ 由 Ω 张成, 则对所有 $m \in M$, 因每个纤维为一维的, 确有体元 $\Omega(m) \neq 0$.

2) 设 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 为图集, $\varphi_i(U'_i) = U_i \subset M$, $U'_i \subset R^n$. 必要时取缩射, 可认为 U'_i 是连通集. 当 M 可定向时, 标准体元 Ω_0 可作为 $\Omega^n(U)$ 中基底, 故对任一体元 Ω , 由 φ 引出的拖射 φ^* 使

$$\varphi_i^*: \Omega^n(U) \rightarrow \Omega^n(U'_i); \quad \varphi_i^* \Omega = f_i \Omega_0 = f_i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

必要时作反射, 可认为 $f_i(u') > 0, \forall u' \in U'_i$. 但连通集上处处不为零的体元总为正或负, 故有:

$$\begin{aligned} (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})^* \Omega_0 &= \varphi_j^{-1*} \circ \varphi_i^* dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \varphi_j^{-1*} (f_i \Omega_0) \\ &= (\varphi_j)_* f_i \Omega_0 = f_i \circ \varphi_j^{-1} f_j \Omega_0. \end{aligned}$$

这里用到 1.5.4 定义 9 中推射 $\varphi_* = (\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$ 性质. 另一方面, 据定义 7 有:

$$F^* \Omega_0 = DF \cdot dx^1 \wedge DF \cdot dx^2 \wedge \dots \wedge DF \cdot dx^n,$$

故由定理 5 中行列式定义知(注意 f_i, f_j, φ_j^{-1} 为正):

$$\det(D(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})) = f_i \circ \varphi_j^{-1} \circ f_j > 0.$$

反之, 设 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 为具给定性质的图集, $\{(U_i, \varphi_i, g_i)\}$ 为相应的单位分解. 令

$$\Omega_i = \varphi_i^* \Omega_0 \in \Omega^n(U_i); \quad \tilde{\Omega}_i(m) = \begin{cases} g_i(m) \Omega_i(m), & m \in U_i, \\ 0, & m \notin U_i, \end{cases}$$

因 $\text{supp } g_i \subset U_i$, 知 $\tilde{\Omega}_i \in \Omega^n(M)$. 取

$$\Omega = \sum_i \tilde{\Omega}_i,$$

由于右边的和是局部有限和, 故 $\Omega \in \Omega^n(M)$. 最后, 因迭合映射有正的 Jacobi 行列式, 故在 $U_i \cap U_j$ 上 $\Omega_i \neq 0$ 且

$$\begin{aligned} \Omega_j = \varphi_j^* \Omega_0 &= \varphi_j^* \circ (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})^* \Omega_0 = \varphi_i^* [\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \Omega_0] \\ &= [\det(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) \circ \varphi_i] \varphi_i^* \Omega_0 \neq 0, \end{aligned}$$

这里用到易于核验的公式

$$\varphi^*(f\Omega) = [f \circ \varphi] \varphi^* \Omega.$$

因 $\sum_i g_i = 1$, 故对任何 $m \in M$, 有 $\Omega(m) \neq 0$, 即 M 可定向.

下面介绍斜称流形或辛流形. 近年来, 在力学、物理学中常用到这种流形.

定义12 设 E 为有限维实向量空间, $\omega \in T_2^0(E) = \mathcal{L}^2(E, R)$. 若对所有的 $e_2 \in E$, 由 $\omega(e_1, e_2) = 0$ 可得 $e_1 = 0$, 即称 ω 为**非退化型式**. $2n$ 维空间 E 上的非退化 2 型式 $\omega \in \Omega^2(E)$ 称为**斜称型式** (或音译为**辛型式**, 直译为**混杂型式**). 组合 (E, ω) 称为**斜称向量空间**. 若 (E, ω) 及 (F, ρ) 为二斜称空间, 线性映射 $f: E \rightarrow F$ 若使 $f^* \rho = \omega$, 即称为**斜称映射**. 对 (E, ω) 可由

$$\Omega_\omega = (-1)^{n(n-1)/2} \omega^n / n!$$

定义 $2n$ 维空间 E 上的一种定向.

定理11 设 E 为 n 维实向量空间, 则有

1) 若 $\omega \in \mathcal{L}_2^0(E, R)$, 则存在 E 的基底 $\hat{e} = (e_1, \dots, e_n)$

及对偶基底 $\hat{e}^* = (a^1, \dots, a^n)$, 使

$$\omega = \sum_{i=1}^m \eta_i a^i \otimes a^i, \quad \eta_i = \pm 1, \quad m \leq n;$$

2) 若 $\omega \in \Omega^2(E) = \mathcal{L}_0^2(E, R)$, 则存在对偶基底组 \hat{e} 及 \hat{e}^* , 使

$$\omega = \sum_{i=1}^r a^i \wedge a^{i+r}, \quad 2r \leq n.$$

1) 中 m 及 2) 中 $2r$ 称为相应 ω 的秩.

证 利用任意对偶基底组, 总可记

$$\omega = \sum_{i,j} \omega_{ij} a^i \otimes a^j, \quad \omega_{ij} = \omega(e_i, e_j),$$

根据线性代数中关于二次型标准形式的讨论及外积的性质, 即知定理真.

定理12 设 $\omega \in \Omega^2(E)$, 则 ω 为非退化型式的充要条件是: E 具偶数维 $2n$, 且 $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ 为 E 上体元.

证 设 ω 为非退化的. 选 E 的基底使

$$\omega = \sum_{i=1}^r a^i \wedge a^{i+r},$$

因 ω 非退化, 其秩应等于 E 的维数, 故 $\dim E = 2r$, 而为偶数. 其次, 用数学归纳法可证明

$$\omega^k = \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}} a^{j_1} \wedge a^{j_1+r} \wedge \dots \wedge a^{j_{k-1}} \wedge a^{j_{k-1}+r}.$$

当 $k=r$ 时, 把 a^{j_1+r} 后移 $r-1$ 次, a^{j_2+r} 后移 $r-2$ 次, \dots , $a^{j_{r-1}+r}$

后移1次, 知所得 (-1) 的幂次为 $1+2+\cdots+(r-1)=\frac{r(r-1)}{2}$,

此外, (j_1, \cdots, j_r) 与 (j_1+r, \cdots, j_r+r) 的调整排列相同, 故得

$$\omega^r = r!(-1)^{r(r-1)/2} \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^{2r},$$

而为体元. 反之, 若 ω^n 为体元, 则 ω 的秩为 $2n$.

定义13 设 M 为流形, $\omega \in \Omega^2(M)$. 若对每点 $m \in M$, 2 -型式 $\omega(m)$ 为非退化的, 即称 ω 为 M 上的非退化2型式. M 上的非退化的闭2型式 $\omega \in \Omega^2(M)$ 称为斜称型式或斜称结构. 斜对流形 (M, ω) 是流形 M 附以斜称结构 ω .

应用中常遇到的斜称流形是流形 M 的余切丛 T^*M . 在向量丛细图下, 可引进如下的1型式及2型式:

$$-\theta_0 = \sum_{j=1}^n \xi_j dx_j, \quad \omega_0 = -d\theta_0 = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$$

分别称为余切丛上的第一和第二典则型式, 并以 ω_0 作为余切丛上的斜称结构.

1.6.5 交点与绕数

流形 N 的子流形 M, Q 若使 $\dim M + \dim Q = \dim N$, 称 M 及 Q 具互补维数. 若 M 不 N 即 M 贯截于 N , 则互补维数条件使交集 $M \cap Q$ 为零维流形, 因由1.5.3推论3有

$$\text{codim}(M \cap Q) = \text{codim} M + \text{codim} Q = \dim N.$$

若还假定 M 及 Q 都是闭集且至少有一(例如 M)是紧集, 则 $M \cap Q$ 为有限点集^{*)}, 其点数称为 M 与 Q 的交点数, 记作 $\#(M \cap Q)$. 在一般情形, 须先引进如下概念.

---*) 若有无限个交点, 则必有极限点, 仍为交点, 于是 M 及 Q 在此点相切, 而非贯截.

定义14 设 $I = [0, 1] \subset R^1$. 流形 M 及 N 间的光滑映射 f_0, f_1 称为同伦的, 若存在光滑映射 $F: M \times I \rightarrow N$, 使

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x),$$

F 称为 f_0 及 f_1 的同伦. 它是 M 到 N 的光滑映射间的等价关系, 相应的等价类称同伦类.

定义15 设 M 为紧流形, 不必含于流形 N ; $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射并贯截于 N 的闭子流形 Q , 且 $\dim M + \dim Q = \dim N$, 则 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 为 M 的零维子流形, 并为有限集. 称 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 在 $\text{mod } 2$ 下的点数(奇或偶)为映射 f 与 Q 在 $\text{mod } 2$ 下的交点数, 记作 $I_2(f, Q)$. 对任意光滑映射 $g: M \rightarrow N$, 选同伦于 g 而贯截于 Q 的任一光滑映射 $f: M \rightarrow N$, 定义

$$I_2(g, Q) = I_2(f, Q).$$

定理13 设 $f_0, f_1: M \rightarrow N$ 为同伦的光滑映射, 且都贯截于 $Q \subset N$, M 及 Q 如定义15所设, 则有:

$$I_2(f_0, Q) = I_2(f_1, Q).$$

证 设 $F: M \times I \rightarrow N$ 为 f_0 及 f_1 的同伦. 因 f_0 及 f_1 都贯截于 Q , 可认为 F 亦然. 令边界

$$\partial(M \times I) = M \times \{0\} \cup M \times \{1\},$$

且 $F(M \times I) \subset N$ 的边界 ∂F 沿 $M \times \{0\}$ 为 f_0 , 沿 $M \times \{1\}$ 为 f_1 , 即 $\partial F \cap Q$, 故 $F^{-1}(Q \cap f(M))$ 为 $M \times I$ 的一维子流形, 且边界为:

$$\begin{aligned} \partial F^{-1}(Q \cap f(M)) &= F^{-1}(Q \cap f(M)) \cap \partial(M \times I) \\ &= f_0^{-1}(Q \cap f(M)) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Q \cap f(M)) \times \{1\}. \end{aligned}$$

据微分拓扑学的讨论, 具边界的一维连通紧流形必微分同胚于 $[0, 1]$ 或 S^1 , 故 $\partial F^{-1}(Q \cap f(M))$ 有偶数个点, 于是

$$\#f_0^{-1}(Q \cap f(M)) = \#f_1^{-1}(Q \cap f(M)) \pmod{2}.$$

定理13使定义15有确切意义.

推论2 若 $g_0, g_1: M \rightarrow N$ 为同伦的光滑映射, 则

$$I_2(g_0, Q) = I_2(g_1, Q).$$

特别若 M 为 N 的紧子流形, Q 为 N 的闭子流形, 且 M 与 Q 具互补维数, 定义 M 与 Q 在 $\text{mod } 2$ 下的交点数 $I_2(M, Q) = I_2(i, Q)$, 这里 $i: M \hookrightarrow N$ 为嵌入映射. 若 $M \cap Q$, 则 $I_2(M, Q)$ 正是 $\#(M \cap Q) \pmod{2}$.

定理14 设 M 为紧流形, N 为连通流形, $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射. 若 $\dim M = \dim N$, 则 $I_2(f, \{y\})$ 对所有 $y \in N$ 为相同的. 这个数称为 f 在 $\text{mod } 2$ 下的度数 (degree), 记作 $\deg_2 f$.

证 对任意点 $y \in N$, 必要时取 f 的同伦映射, 可认为 f 贯截于 $\{y\}$, 而 y 为 f 的正则值. 存在 y 的邻域 U , 使原象 $f^{-1}(U)$ 为不相交集 V_1, \dots, V_m 的并, 这里 V_i 为 M 中开集, 被 f 微分同胚地映为 U . 于是对所有点 $z \in U$, 有 $I_2(f, \{z\}) = m \pmod{2}$. 因此, 由 $y \mapsto I_2(f, \{y\})$ 在 N 上定义的函数局部地为常数. 但因 N 为连通集, 故全局为常数.

作为计算 $\deg_2 f$ 的例, 取复平面中映射 $z \mapsto z^n$. 当 n 为偶数时, $\deg_2(z^n) = 0$; 当 n 为奇数时, $\deg_2(z^n) = 1$.

推论3 同伦映射有相同的度数.

$\text{mod } 2$ 下的交点数当然缺乏精确性, 为此引进定向交点数.

定义16 设 M, N, Q 为定向流形, M 为紧集, Q 为 N 的闭子流形, $\dim M + \dim Q = \dim N$, $f: M \rightarrow N$ 为光滑映射且贯截于 Q , 则 $f^{-1}(Q \cap f(M))$ 为有限集, 对其中每点, 由原象的定向赋以定向数 ± 1 . 定义定向交点数 $I(f, Q)$ 为这些定向数的和.

定义17 设 M 为定向流形, N 为连通定向流形, $\dim M = \dim N$. 定义任一光滑映射 $f: M \rightarrow N$ 的度数为 $\deg(f) = I(f,$

$\{y\}$), y 为 N 中任一点.

定义18 设 M 为 1 维紧定向流形, $f: M \rightarrow R^{1+1}$, 则 f 对任一点 $z \in R^{1+1} \setminus f(M)$ 的绕数定义为 $W(f, z) = \deg(u)$, 这里

$$u(x) = \frac{f(x) - z}{\|f(x) - z\|}: M \rightarrow S^1.$$

下面不加证明, 引述几个结果.

定理15 同伦映射有相等的定向交点数.

定理16 设 c 为 $R^2 \setminus \{0\}$ 中光滑曲线, ω 为 $R^2 \setminus \{0\}$ 中任一闭 1 型式, 则有

$$\oint_c \omega = W(c, 0) \oint_{S^1} \omega,$$

S^1 为单位圆周.

关于 1.4—1.6 三节, 进一步的参考书是:

R. Narasimhan, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, Masson et Cie, Paris, 1973.

J. Dieudonné, *Treatise on Analysis*, II, Academic Press, New York, 1970.

V. I. Arnold, *Mathematical Foundations of Classical Mechanics*, Springer Verlag, Berlin, 1978.

R. O. Wells, *Differential Analysis on Complex Manifolds*, Prentice Hall, New Jersey, 1973.

Y. Choquet-Bruhat et al., *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1977.

I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, 1967, Scott, Foresman and Company, Dallas, TX.

RL. Bishop, R. J. Crittenden, *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

本章主要参考书

Köthe, G., *Topologische Lineare Räume, I*, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Abraham, R. and Marsden, T. E., *Foundations of Mechanics*, 1967, chap. 2-4; 2nd ed., Benjamin, New York, 1974.

Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 1974.

2. 广义函数

广义函数(简称广函)近年来得到多方面的应用。本章利用局部凸空间理论来奠定广函理论;重点是广函的乘、除法问题。

2.1 对偶性

广函有多种定义方式;最常用的一种,是把它理解为某些函数空间(检验空间)上的连续线性泛函。所以先考察局部凸空间的共轭空间的一些性质。

2.1.1 强与弱拓扑

定理1 设 E 为Fréchet空间,则 E 中任一个桶(闭、凸、

心实称的吞吸集)含 E 中一个零元邻域。

证 因桶 B 为吞吸集,故 $\bigcup_{m=1}^{\infty} mB$ 覆盖 E .但 E 作为完备度量空间是第二纲集.事实上,若不然设 E 可表为可列个疏集 $\{M_j\}$ 的和: $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$.以任一点 $a \in E$ 为心作半径为1的闭球 $S(a,1) = \{x; \rho(x,a) \leq 1\}$,这里 ρ 为 E 中度量.因 M_1 为疏集,在 $S(a,1)$ 中存在闭球 $S(a_1,r_1)$, $r_1 < \frac{1}{2}$,不含 M_1 中的点.同样,因 M_2 为疏集,在 $S(a_1,r_1)$ 中存在闭球 $S(a_2,r_2)$, $r_2 < \frac{1}{2^2}$,不含 M_2 中的点.如此构造下去,得一系列单降闭球

$$S(a_1,r_1) \supset S(a_2,r_2) \supset \cdots \supset S(a_n,r_n) \supset \cdots$$

且 $r_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, $S(a_n,r_n)$ 不含 M_1, \dots, M_n 中点.由于 E 是满足分离公理 T_2 的完备空间,这个闭球列有唯一的交 $a_0 \in E$.但根据上述构造,知 $a_0 \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} M_n$.这就与假设 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_n$ 不符.

故 E 不能为第一纲集.由 $E = \bigcup_{m=1}^{\infty} mB$ 知 B 不是疏集,不然每个 mB 都是疏集.故 $\overline{B} = B$ 含内点 x_0 ,并含 x_0 的某个开邻域 $x_0 + U$,这里 U 是 E 中某零元邻域,且不妨认为 U 是心实称的.由 B 的心实称性知有: $-x_0 - U = -x_0 + U \subset -B = B$.但 B 为凸集,故 $\frac{1}{2}(x_0 + U) + \frac{1}{2}(-x_0 + U) = U \subset B$.定理证毕.

定义1 设 E 为拓扑线性空间,集

$$V(A, \varepsilon) \equiv \{f; |f(A)| < \varepsilon\}$$

称为 E' 中零元的强邻域,这里 A 为 E 中任一有界集, ε 为任意正数.

可核验1.1.1中的邻域公理成立，故构成拓扑，称为 E' 上的强拓扑。于是强有界性、强闭包、强收敛性、强连续性等概念可相应引出。

定理2 若 E 满足第一可列公理，则 E' 在强拓扑下为完备空间。

证 设 $\{f_n\} \subset E'$ 为强基本列，则对任一点 $x \in E$ ， $\{f_n(x)\}$ 为基本数列。记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ，则 f 为线性泛函；且对每个有界集 $A \subset E$ ，因 $\{|f_n(A)|\}$ 为有界数列，而有 $|f(A)| < \infty$ ，故 f 为有界泛函。据1.3.1定理2，知 f 为连续线性泛函，即 $f \in E'$ ，且显然在强拓扑下有 $f_n \rightarrow f$ ，故 E' 为强完备的。

推论1 设 E 为拓扑线性空间，则 E' 中集 B' 为强有界的，当且仅当对 E 中每个有界集 A ， B' 在 A' 上为有界的，即

$$|B'(A)| \equiv \sup_{f \in B'} |f(A)| < \infty. \quad (1)$$

证 设 B' 为强有界集，则对 E' 中零元的任一强邻域 $V(A, 1)$ ，有某个 $\rho > 0$ 使 $B' \subset \rho V(A, 1)$ ，这表明 $|B'(A)| < \rho$ 。反之，若对 E 中任一有界集 A ，(1)总成立，则对 E' 中零元的任一强邻域 $V = V(A, \varepsilon)$ ，当 $\mu > \frac{|B'(A)|}{\varepsilon}$ ，即有 $B' \subset \mu V$ ，故 B' 为强有界集。

推论2 若拓扑线性空间 E 满足第一可列公理，则 E' 中每个强有界集 B' 在 E 的某零元邻域上有界。

证 设若不然。则对 E 中零元的可列邻域基 $U_1 \supset U_2 \supset \dots$ ，存在点列 $\{x_n\}$ ， $x_n \in U_n$ ，及列 $\{f_n\} \subset B'$ ，可使 $|f_n(x_n)| \rightarrow \infty$ ，但 $\{x_n\}$ 为有界集，所得矛盾表明推论成立。

定理3 设 E 为局部凸可度量化空间，则 E' 中集 B' 为强有界集，当且仅当：对某个 k ， $B' \subset E'_k$ 且按 E'_k 中范有界。

注1 记 E 中半范 $p_k(x)$ 的核(零化空间)为:

$$K_k \equiv \{x; x \in E, p_k(x) = 0\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

则商空间 $\widehat{E}_k = E/K_k$ 为Banach空间, 而以 $\|x\|_k = p_k(\widehat{x}_k)$ 为范, 这里 \widehat{x}_k 为 x 在 \widehat{E}_k 中的等价类. 记 \widehat{E}_k 的对偶空间为 E'_k , 其中的范 $\|f\|_k = \sup_{\|x\|_k=1} |f(x)|$.

证 若 $B' \subset E'_k$ 且依其中范有界, 则在 E 的零元邻域 $U = \{x; x \in E, \|x\|_k \leq 1\}$ 上, B' 为有界的. 故 B' 在 E 的任一有界集上有界, 据推论1, B' 为强有界集. 反之, 若 B' 为强有界集, 则由推论2, B' 在 E 的某零元邻域 $V = \{x; \|x\|_k < \varepsilon\}$ 上有界. 设 $|B'(V)| < M$, 则对每个 $f \in B'$, 有 $B' \subset E'_k$ 且 $\|f\|_k < M/\varepsilon$.

定义2 设 E 为拓扑线性空间. E 中弱拓扑由

$$V \equiv V(x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \equiv \{f; |f(x_j)| < \varepsilon, j = 1, \dots, m\}$$

确定的零元邻域基构成, 其中 m 为任一正整数, x_1, \dots, x_m 为 E 中任意 m 个点, ε 为任意正数. 由此可引出弱有界性弱收敛性等概念.

显然, E' 中弱拓扑粗于强拓扑. 弱收敛性特别表明: 对任一 $x \in E$, 有 $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

定理4 设 E 为Fréchet空间, 则 E' 中弱有界集也是强有界集.

证 设 B' 为 E' 中任一弱有界集. 记

$$F = \{x; x \in E, |f(x)| \leq 1, \forall f \in B'\}$$

可核验 F 为桶. 据定理1, F 含 E 中某零元邻域 U . 因 B' 在 U 上有界且 U 为吞吸集, 故 B' 在 E 的任一有界集上有界. 由推论1知 B 为强有界集.

推论3 E' 中集 B' 为弱有界集, 当且仅当对每一点 $x \in E$ 有

$$\sup_{f \in B'} |f(x)| < \infty.$$

推论4 设 E 为 F 空间, 则 E' 中弱收敛列 $\{f_n\}$ 为强有界集.

定理5 设 E 为 F 空间, 则 E' 关于弱拓扑为完备空间.

证 设 $\{f_n\}$ 为 E' 中弱基本列, 则 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 对任一点 $x \in E$ 存在. 据定理4, 对任一有界集 $A \subset E$, $|f_n(A)| < C$. 故 $|f(A)| < C$. 这表明 f 连续. 显然在弱拓扑下有 $f_n \rightarrow f \in E'$. 定理得证.

定义3 拓扑线性空间 E 中的强拓扑由如下确定的零元强邻域

$$V \equiv V(B', \varepsilon) \equiv \{x; x \in E, |f(x)| < \varepsilon, \forall f \in B'\}$$

构成, 这里 B' 为 E' 中任一强有界集, ε 为任意正数; E 中弱拓扑由零元的弱邻域

$$W \equiv W(f_1, \dots, f_m; \varepsilon) \equiv \{x; x \in E, |f_j(x)| < \varepsilon, j = 1, \dots, m\}$$

所确定, 这里 m 为任意正整数, f_1, \dots, f_m 为 E' 中任意 m 个元, ε 为任意正数.

定理6 设 E 为 F 空间, 则 E 中强拓扑与原有局部凸拓扑等价.

证 E 中每个零元邻域 $V = \{x; \|x\|_k < \varepsilon\}$ 也是强邻域. 事实上, 若 $x \in V$, 则对集

$$B' = \{f; f \in E'_k, \|f\|_k \equiv \sup_{\|x\|_k=1} |f(x)| = 1\}$$

中任何 f 有 $|f(x)| < \varepsilon$, 故 $V \supset \{x; x \in E, |f(x)| < \varepsilon, \forall f \in B'\}$, 而为 E 中零元的一个强邻域. 反之, 设 U 是 E 中零元的一个强邻域, 则对 E' 中某强有界集 B' , 有:

$$U = \{x; x \in E, |f(x)| < \varepsilon, \forall f \in B'_1\},$$

据定理 3, $B'_1 \subset E'_k$ 且 $\|f\|_k < C, \forall f \in B'_1$. 故 U 包含集

$$U_0 = \{x; x \in E, |f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}, \forall f \in E'_k, \|f\|_k = 1\}$$

而 U_0 等同于 E 中零元邻域 $\{x; \|x\|_k < \frac{\varepsilon}{C}\}$.

定理7 F 空间 E 中的强及弱有界性重合一致.

证 强有界集显然为弱有界集. 反之, 设 A 为 E 中弱有界集, 则当 $\rho > 0$ 充分小时, ρA 含于 E 中零元的任一给定弱邻域中. 故对任一 $f \in E'$ 及所有的 $x \in E$, 有 $|f(x)| < C$. 特别对任一个 $f \in E'_k$, 有 $|f(A)| < \infty$, 故 A 在每个 \hat{E}_k 中为有界集. 据定理 3 知 A 为强有界集.

推论5 F 空间 E 中的弱收敛列为强有界集.

2.1.2 FM空间

定理8 在 FM 空间 E 中, 强及弱收敛性重合一致.

证 因 F 空间满足第一可列公理, 收敛性可由序列表述. 显然, 强收敛列必弱收敛. 反之, 设列 $\{x_n\}$ 在 E 中弱收敛于零. 据推论 5 知 $\{x_n\}$ 为强有界集. 回忆 FM 空间中强有界集为相对紧集(见 1.2.4), 故 $\{x_n\}$ 必有子列强收敛随之弱收敛于某 $x \neq 0$, 而与假定不符. 因此 $\{x_n\}$ 必强收敛于零.

推论6 FM 空间 E 在弱拓扑下是完备的.

证明类似于定理 8.

定理9 设 E 为 FM 空间, 则 E' 中的强及弱收敛性一致.

证 E' 中强收敛性显然包含弱收敛性. 反之, 设 $\{f_n\} \subset E'$ 弱收敛于零, 故对任一点 $x \in E, f_n(x) \rightarrow 0$. 须证明, 对 E

中任一有界集中的点 x , $f_n(x)$ 一致收敛于零. 设若不然, 则在 E 中某有界集 A 中存在点列 $\{x_n\}$, 使对某 $\varepsilon > 0$ 有 $|f_n(x_n)| > \varepsilon$. 因 $\{x_n\}$ 为有界集且 E 为 FM 空间, 故有子列 $\{x_{n'}\}$ 强收敛于某点 $x \in E$. 于是对 E' 中任一有界集 B' 中的 f , 一致有 $f(x_{n'} - x) \rightarrow 0$. 特别取 $B' = \{f_n^{\wedge}\}$, 有

$$f_{n'}(x_{n'}) = f_{n'}(x_{n'} - x) + f_{n'}(x) \rightarrow 0 \quad (n' \rightarrow \infty)$$

而得矛盾. 故 E' 中弱收敛性也包含强收敛性.

定理10 设 F 空间 E 为可分的(即 E 含可列稠集), 则 E' 中每个有界集为弱列紧的(即每个序列有子列, 收敛于 E' 中某元).

证 设 $\{x_n\}$ 为 E 中可列稠集. 对给定的任一有界无穷集 $B' \subset E'$, 用对角化方法可选出无穷列 $\{f_n\}$, 使对每个 x_m 收敛. 据定理3, 对每个 k 有 $\|f_n\|_k < C$, 但因 $\{x_n\}$ 为 E 中稠集, 故 $\{f_n\}$ 在 E 上收敛. 现在证明 $\{f_n\}$ 的弱极限 f 属于 E' . 事实上, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 对每个 $x \in E$ 存在. 据推论4知, 对每个有界集 $A \subset E$, 有 $|f_n(A)| < C$. 故 $|f(A)| < C$. 于是 f 为有界线性泛函. 据1.3.1定理2, f 为连续的, 即 $f \in E'$. 因此, B' 为弱列紧的.

定理11 FM空间 E 为可分空间.

证 若所有 \widehat{E}_k (见注1)为可分的, 则在其中取可列稠集 S_k , 其并 $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ 即为 E 的可列稠集. 事实上, 对任一点 $x \in E$, 存在 $x_k \in S_k$, 使 $\|x_k - x\|_k < \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots$, 且显然有 $x_k \rightarrow x$.

故只须证每个 \widehat{E}_k 为可分空间. 用反证法, 不妨设 \widehat{E}_1 不是可分空间. 则在 \widehat{E}_1 中存在有界的、非可列的无穷集 N , 使对 N 中任

二点 x 及 y ，都有 $\|x-y\|_1 \geq \varepsilon > 0$ 。因 E 含于球 $\|x\|_1 < m$ ($m=1, 2, \dots$)的并中，故对某个 m_1 ， $N_1 = N \cap \{x; \|x\|_1 < m_1\}$ 不是可列集。同样，对某个 $m_2 > m_1$ ， $N_2 = N_1 \cap \{x; \|x\|_2 < m_2\}$ 不是可列集。这样构造下去，知对每个正整数 k ，在 \widehat{E}_k 中存在有界的非可列集 N_k 。对每个 k ，取 N_k 中点 x_k ，使当 $k \neq j$ 时， $x_k \neq x_j$ ，即得 E 中有界列 $\{x_j\}$ ，而无收敛子列。这与 E 为FM空间的假定不符。故所有 \widehat{E}_k 为可分的，随之 $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \widehat{E}_k$ 也是可分空间。

结合定理9—11，即得重要结果。

定理12 设 E 为FM空间，则 E' 中有界集在强及弱拓扑下都是相对列紧的。

2.1.3 严格归纳极限

在1.1.1中提到拓扑空间列 $\{E_j\}$ 的严格归纳极限 $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ ，这里要求 $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_j \subset \dots$ 且每个 E_j 的拓扑是 E_{j+1} 中拓扑的导拓扑； U 为 E 中零元邻域，当且仅当对每个 j ， $U \cap E_j$ 为 E_j 中零元邻域。现在利用对偶性考察 E 及 E' 的一些重要性质。

定理13 设 E 是拓扑线性空间列 $\{E_j\}$ 的严格归纳极限。若在 E 中 $x_n \rightarrow x$ ，则 x 及 x_n 同属于某个 E_m 且在 E_m 中 $x_n \rightarrow x$ 。反之亦然。

证 不失一般性，设 $x=0$ 。若 $\{x_j\}$ 不属于某 $E_{m'}$ ，则存在两个列 $\{x_{j'}\}$ 及 $\{E_{m'}\}$ ， $m' = m'(j')$ ，且 j', m' 都随 j 单增地趋于 ∞ ，使当 $k' > j'$ 时， $x_{k'} \notin E_{m'}$ ，当 $k' \leq j'$ 时 $x_{k'} \in E_{m'}$ 。对每个 m' ，取 $E_{m'}$ 的零元邻域 $V_{m'}$ ，使不含点 $x_{k'} (k' \leq j')$ 。于

是 $V_{m'} \cap \{x_k\} = \emptyset$. 因 $V = \bigcup_{m'} V_{m'}$ 为 E 的零元邻域且 $V \cap \{x_k\} = \emptyset$, 则 $x_k \rightarrow 0$ (在 E 中) 而与假定不符. 现在设 $\{x_n\} \subset E_{m_0}$, $\forall m \geq m_0$, 而证在 E_{m_0} 中 $x_n \rightarrow 0$. 假定不然, 则在 E_{m_0} 中存在零元邻域 W_{m_0} , 而与 $\{x_n\}$ 的某个子列不相交. 为简单计, 仍记这个子列为 $\{x_n\}$. 对 $m > m_0$, 设 W_m 为 E_m 的零元邻域, 使 $W_m = E_m \cap W_{m+1}$, $m \geq m_0$. 因 $\{x_n\}$ 与 W_{m_0} 不相交, 故 $W_m \cap \{x_n\} = \emptyset$, $m \geq m_0$. 于是 $W = \bigcup_{m \geq m_0} W_m$ 为 E 中零元邻域且与 $\{x_n\}$ 不相交. 这与在 E 中 $x_n \rightarrow 0$ 的假定不符. 故 $\{x_n\}$ 应在 E_{m_0} 中趋于零. 逆命题是显然的.

定理14 设 E 如前. 若 B 为 E 中有界集, 则 B 含于某个 E_m 并在其中有界. 反之亦然.

证 若 B 不含于某个 E_m , 则存在两个列 $\{x_{j'}\}$ 及 $\{E_{m'}\}$, $m' = m'(j')$, m', j' 都随 j 单增, 使 $\{x_{j'}\} \subset B$, 且当 $k' > j'$ 时, $x_{k'} \notin E_{m'}$, 当 $k' \leq j'$ 时, $x_{k'} \in E_{m'}$. 取 $E_{m'}$ 中零元邻域 $V_{m'}$ 使 $m'V_{m'}$ 不含 $x_{k'} (k' \leq j')$. 于是 $m'V_{m'} \cap \{x_{j'}\} = \emptyset$. 集 $V = \bigcup_{m'} V_{m'}$ 是 E 的零元邻域且因

$$k'V \subset [k' \bigcup_{m' < k'} V_{m'}] \cup [\bigcup_{m' > k'} m'V_{m'}]$$

对任何整数 k' , $\{x_{j'}\}$ 不含于 $k'V$. 因 V 为凸集, 对任何 λ , 有界集 $\{x_{j'}\}$ 不含于 λV . 这是不可能的.

现在设 $B \subset E_m$, $\forall m \geq m_0$. 若 B 不在 E_{m_0} 中有界, 则对 E_{m_0} 的某零元邻域 W_{m_0} , B 不含于任何 λW_{m_0} . 由 W_{m_0} 仿照定理13的证明构造 W_m , 则 B 不含于任何 λW_m 中, 随之不含于任何 λW 中, 这里 $W = \bigcup_{m \geq m_0} W_m$, 而与 B 在 E 中的有界性假定矛盾.

盾，因 W 是 E 中的零元邻域。逆命题是显然的。

定理15 设 E 如前。若每个 E_m 是完备空间，则 E 亦然；反之，若 E_j 为 E 的闭子空间且 E 为完备的，则 E_j 是完备的。

证明仿照前两个定理。

推论7 若每个 E_j 满足第一可列公理，则 E 上线性泛函为连续的，当且仅当由在 E 中 $x_n \rightarrow 0$ 有 $f(x_n) \rightarrow 0$ ；或当且仅当 f 在 E 的每个有界集上为有界的。

定理16 设每个 E_j 为 F 空间，则 E 的共轭空间 E' 在弱拓扑下为完备空间。

证 设 $\{f_n\}$ 为 E' 中弱基本列，则其极限 f 在每个 E_j 上为连续线性泛函，故 $f \in E'$ 。事实上，对数域 K 中零元的任一凸邻域 $N = \{y: |y| < \varepsilon\}$ ，集合 $\{x: |f(x)| < \varepsilon, x \in E\} \cap E_j$ 是 E_j 的零元邻域， $j = 1, 2, \dots$ ，故 $\{x: |f(x)| < \varepsilon\}$ 是 E 的零元邻域，即 f 为 E 上连续线性泛函。

在本节最后，提一下LF空间。

定义4 设 $\{E_m\}$ 为拓扑线性空间的单增列：

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m \subset \dots$$

$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ ，且每个 E_j 的拓扑强于由 E_{j+1} 引出的导拓扑。在 E 中引进收敛性及有界性概念如下：

1) 在 E 中 $x_n \rightarrow x$ 当且仅当： $\{x_n\}$ 及 x 属于某个 E_m 并在 E_m 中 $x_n \rightarrow x$ ；

2) B 为 E 中有界集当且仅当： B 含于某个 E_m 并在 E_m 中有界，

而称 E 为 $\{E_m\}$ 的可列并。特别若 E_m 都是 F 空间时，称 E 为LF空间。

注意在 E 中并未引进拓扑。但可定义其上线性映射 L 的有

界性及连续性如下： L 连续(有界)当且仅当它在每个 E_j 上连续(有界)。 E 的对偶空间仍记为 E' ，在 E' 中可引进两种收敛性：若对每个 $x \in E$ 有 $f_n(x) \rightarrow 0$ ，称 f_n 弱收敛于零；若对 E 中每个有界集中的 x 有 $f_n(x) \rightarrow 0$ ，则称 f_n 强收敛于零。 E' 中集 B' 称为弱(强)有界的，若对每个 $x \in E$ (每个有界集 $A \subset E$)，数集 $\{f(x); f \in B'\}$ ($\{f(x); f \in B', x \in A\}$) 为有界的。若 E_j 都是 F 空间，则 E' 中的强及弱有界性重合一致。

定理13及14对 $\{E_j\}$ 的可列并据定义而成立；定理 15、16 及推论 7 也保持有效。

严格归纳极限及可列并概念可推广到任意空间族 $\{E_\alpha, \alpha \in I\}$ 的情形， I 可为非可列无穷指标集。

2.2 检试函数与广函

2.2.1 一般性考察

以后考虑具体的函数空间，并采用如下的标准记法：

$$x \in R^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_j \in R, j = 1, \dots, n\},$$

$$\xi \in R_n = \{(\xi_1, \dots, \xi_n); \xi_j \in R, j = 1, \dots, n\}$$

$$x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n;$$

$$\zeta = \xi + i\eta = (\xi_1 + i\eta_1, \dots, \xi_n + i\eta_n) \in \mathbf{C}_n,$$

$$i = \sqrt{-1}; z = x + iy \in \mathbf{C}^n;$$

$$|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2; |z|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2;$$

$$\partial^a = \partial_1^{a_1} \dots \partial_n^{a_n}, \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (j = 1, \dots, n),$$

$$a = (a_1, \dots, a_n) \in N^n;$$

$$x^a = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}; \quad |a| = a_1 + \cdots + a_n;$$

$$a! = a_1! \cdots a_n!; \quad \binom{a}{\beta} = \binom{a_1}{\beta_1} \cdots \binom{a_n}{\beta_n};$$

$$a \geq \beta \iff a_j \geq \beta_j (j = 1, \dots, n);$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n}{b_n} \right); \quad \frac{ak}{b} = \left(\frac{a_1 k_1}{b_1}, \dots, \frac{a_n k_n}{b_n} \right);$$

$$e^{a \cdot b z, k} = \exp \{ a_1 |b_1 z_1|^{k_1} + \cdots + a_n |b_n z_n|^{k_n} \};$$

若 a, b, k 为标量, 上述记法仍被采用, 但 $a_1 = \cdots = a_n = a$, $b_j = b$, $k_j = k$, $j = 1, \dots, n$.

定义1 定义于开集 $\Omega \subset R^n$ 或 $\Omega \subset C^n$ 中的实或复值函数 $\varphi(x)$ 或 $\varphi(z)$ 的集 Φ , 若具备下述性质:

1) Φ 为 F 空间或 LF 空间;

2) 若在 Φ 中 $\varphi_j \rightarrow 0$, 则对每一点 $x_0 \in \Omega$, $\varphi_j(x_0) \rightarrow 0$; 即称为检试空间或基本空间, 其中元称为检试函数. 具紧台的检试函数称为紧检试函数.

若 G 为开集, 记 $C^m(G)$ ($0 \leq m \leq \infty$) 为 G 中 m 次连续可微函数的集; 若 G 为某开集的闭包, $C^m(G)$ 则表示在 G 内部有前 m 阶一致连续导数因而可连续延拓到 G 的边界 ∂G 的函数的集. 特别用 $C^m(G)$ 或 $C_c^m(G)$ (G 为开集) 记 $C^m(R^n)$ 中台属于 G 的函数的集; $C_0^m(R^n)$ 则是 $C^m(R^n)$ 中所有具紧台的函数的集.

为引进一类检试空间, 考虑函数列 $\{M_j(x)\}$:

$$1 \leq M_1(x) \leq M_2(x) \leq \cdots \leq M_j(x) \leq \cdots$$

每个 $M_j(x)$ 定义于 R^n 且值为有限或 ∞ ; 在 R^n 的每一点, 所有 M_j 同为有限或同为 ∞ . 记 $R_M = \{x, M_j(x) = \infty\}$, $R_M^n = R^n \setminus R_M$, 并设所有 M_j 在 R_M^n 中连续. 为简单计, 假定 R_M^n 含内点且其边界在 R^n 中具零 Lebesgue 测度.

考虑 $C^\infty(R^n)$ 中 足下面两个要求的函数 $\varphi(x)$;

$$\partial^\alpha \varphi(x) = 0, \quad \forall x \in R_M, \quad |\alpha| = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$M_k(x) \partial^\alpha \varphi(x) \text{ 为 } R_M^n \text{ 上有界连续函数.} \quad (2)$$

(2) 中 $0 \leq |\alpha| \leq k, 1 \leq k < \infty$. 记这种 $\varphi(x)$ 的全体为 $K\{M_k\}$, 它显然作成线性空间, 其中局部凸拓扑可用范列

$$\|\varphi\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in R_M^n} M_k(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad (1 \leq k < \infty) \quad (3)$$

定义. 注意若 R_M^n 为闭集, 则(1)表明 $\text{supp } \varphi \subset R_M^n$.

例1 设 N 为 R^n 中紧集, 用 $D(N) = K(N)$ 记 $C^\infty(R^n)$ 中在 N 外恒等于零的函数的集. 这时

$$M_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in N; \\ \infty, & x \notin N; \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

若用 $D^m(N)$ 记 $C_0^m(N)$ 而赋之以范(3)

$$\|\varphi\|_m = \max_{|\alpha| \leq m} \max_{x \in N} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

的 Banach 空间, 则 $D(N) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D^m(N)$ 为 F 空间.

特别当 $N = \{x: |x_j| \leq a_j, j = 1, \dots, n\}$ 时, 记 $K(N)$ 为 $K(a)$.

例2 急降函数空间 $\mathcal{S}(R^n)$ 或 $S(R^n)$ 由

$$M_k(x) = (1 + |x|)^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

所刻划, 相应的范列(3)是:

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in R^n} |(1 + |x|)^m \partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m = 1, 2, \dots$$

以后会看到, S 是 FM 空间. S 中函数 $\varphi(x)$ 及其各阶导数当 $|x| \rightarrow \infty$ 时比 $\frac{1}{|x|}$ 的任何次幂更快地趋于零: $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m |\partial^\alpha \varphi(x)| = 0$.

另一类检试空间是复变元的函数空间。考虑 $z \in \mathbb{C}^n$ 的连续函数列 $\{M_j(z)\}$;

$0 < C(y) \leq M_1(z) \leq \dots \leq M_j(z) \leq \dots$, $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$,
 $C(y)$ 为某连续函数。检试函数是所有能延拓为整函数并使如下定义的范

$$\|\psi(z)\|_k = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} M_k(z) |\psi(z)| \quad (1 \leq k < \infty) \quad (6)$$

有限的函数 $\psi(z)$ 。记这个空间为 $Z\{M_k\}$ ，并用范列(6)确定其中局部凸拓扑。

例3 $M_k(z) = e^{-a|y|} (1 + |z|)^k$,
 其中 $a > 0$, 即 $a_j > 0, j = 1, \dots, n$ 。记相应空间为 $Z(a)$ ，它由所有指数型整函数中满足不等式

$$(1 + |z|)^k |\psi(z)| \leq C_k e^{a|y|} \quad (0 \leq k < \infty) \quad (*)$$

的整函数 $\psi(z)$ 组成，其中 C_k 可与 ψ 有关。

定理1 若检试空间 Φ 为含某个 $K(N)$ 的 F 空间，则当列 $\{\varphi_j\}$ 按 $K(N)$ 中拓扑收敛于零时，它也按 Φ 中拓扑收敛于零。

证 若在 $K(N)$ 中 $\varphi_j \rightarrow 0$ 而在 Φ 中 $\varphi_j \rightarrow \varphi^*$ ，则由定义 1 中 2) 知对任一点 $x \in \Omega$ 有 $\varphi^*(x) = 0$ ，故 φ^* 为 Φ 中零元。

当 Φ 为 F 空间列 $\{\Phi_j\}$ 作成的 LF 空间时，只要对某个 m 有 $K(N) \subset \Phi_m$ ，定理 1 显然保持成立。

定义2 检试空间 Φ 称可微空间，若对任何 $\varphi \in \Phi$ ，总有

$$\partial_j \varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in \Phi, \quad j = 1, \dots, n, \text{ 且映射}$$

$$\varphi \mapsto \partial_j \varphi$$

为由 Φ 到 Φ 的连续映射。

显然，若 Φ 为可微空间，则对任何多重指标 α ，映射 $\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi$ 为由 Φ 到自身的连续映射。

定义3 函数 α 称为 Φ 上乘子, 若对任一 $\varphi \in \Phi$, $\alpha\varphi \in \Phi$ 且映射 $\varphi \rightarrow \alpha\varphi$ 为由 Φ 到自身的连续映射。

定义4 检验空间 Φ 上的连续线性泛函称为 Φ 上广义函数, 简称广函, 即广函为对偶空间 Φ' 中元。

广函 f 一般不是函数, 但为了强调 f 所作用的检验函数 φ 依赖于 x , 有时也记作 $f(x)$ 。 f 对 $\varphi \in \Phi$ 的作用表示为如下记法之一:

$$f(\varphi), (f, \varphi), \langle f, \varphi \rangle, f[\varphi(x)], \langle f(x), \varphi(x) \rangle.$$

据2.1.3中推论7及关于 L_F 空间的说明, 有以后常用到的重要准则。

定理2 $f \in \Phi'$ 当且仅当: f 为 Φ 上线性泛函且对 Φ 中任一收敛于零的列 $\{\varphi_j\}$ 有 $f(\varphi_j) \rightarrow 0$ 。

若 $f(x)$ 为局部 L 可积函数, 即在任一有界可测集上绝对可积的函数, 则由积分

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in \Phi$$

确定的广函 $f \in \Phi'$ 称为函数型广函或正则广函。

关于广函的唯一确定问题, 有如下定理。

定理3 若检验空间 Φ 具备下述性质:

1) 对任一固定点 $x_0 \in R^n$, 有 Φ 中函数 φ 在 x_0 的某邻域中不等于零;

2) 对任一 $\varphi \in \Phi$, 积 $e^{ix\xi} \varphi(x)$ 对所有 $\xi \in R_n$ 仍属于 Φ ; 则当函数型广函 $f(x)$ 作用于任一 $\varphi \in \Phi$ 都取零值时, 即在 R^n 中殆遍有 $f(x) \equiv 0$ 。

证 据性质2)及取零值假定有

$$\int_{R^n} f(x) \varphi(x) \exp(ix\xi) dx = 0,$$

这表明函数 $f(x)\varphi(x)$ 的Fourier变换恒等于零；但由反转公式（或Fourier变换的唯一性定理，参看E.C.Titchmarsh, *Intr. to the Theory of Fourier Integrals*, § 6.7, Th.120 Academic Press, New York, 1937），知在 R^n 中殆遍有 $f(x)\varphi(x) = 0$ 。据性质1)知在 R^n 中殆遍有 $f(x) \equiv 0$ 。

上述证明也可用于有限阶广函

$$(f, \varphi) = \int_{R^n} F(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx \quad (7)$$

这里 $F(x)$ 为某局部 L 可积函数。若 f 不能对更小的 $|\alpha| = p$ 表为形(7)，即称 f 为 p 阶广函。特别函数型广函为零阶广函。作为一阶广函的例，可举一维情形的Dirac测度 $\delta(x)$ ：

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} [-H(x)] \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0),$$

$$\forall \varphi \in D(R^1),$$

其中 $H(x)$ 为Heaviside函数：

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

事实上， (δ, φ) 不能用任何局部可积函数 $f(x)$ 表为形(7)。因若不然而设

$$(\delta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

则特别取 $\varphi(x) \in D(R^1)$ 如下：

$$\varphi(x) = \varphi(x; A, b, b) = \begin{cases} A \exp \frac{-b^2}{b^2 - r^2}, & r = |x| < b, \\ 0, & r \geq b, \end{cases} \quad A \neq 0 \quad (8)$$

则有：

$$\begin{aligned}
 (\delta, \varphi) &= \int_{|x| < b} f(x) \varphi(x; A, b, b) dx = \varphi(0; A, b, b) \\
 &= Ae^{-1},
 \end{aligned}$$

但当 $b \rightarrow 0$ 时上式中的积分趋于零, 而 $Ae^{-1} \neq 0$. 故 δ 不是函数型广函. 既然它可用 $H(x)$ 表为 $-\int H(x)\varphi'(x)dx$, 故确为一阶广函.

2.2.2 空间 $K\{M_k\}$ 及 $Z\{M_k\}$

考虑空间

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Phi}_m &\equiv \{\varphi(x); \varphi \in C^m(R^n), \\
 \|\varphi\|_m &\equiv \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in R^n} M_m(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| < \infty\}
 \end{aligned}$$

在 R_M 上当然应理解 $\varphi(x) \equiv 0$. 于是可证明:

引理1 $\widehat{\Phi}_m$ 为完备空间.

证 设 $\{\varphi_j\}$ 为 $\widehat{\Phi}_m$ 中基本列, 即如下的列

$$\begin{aligned}
 |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_k(x)| &\leq M_m(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_k(x)| \\
 &\leq \|\varphi_j - \varphi_k\|_m \leq \varepsilon_j, \quad |\alpha| \leq m, \quad k \geq j,
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\varepsilon_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). 因对 $x \in R_M$, 上式左边为零, 故在 R^n 中一致有 $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi_0$. 由此知 $\varphi_0 \in C^m(R^n)$ 且在 R_M 上当 $|\alpha| \leq m$ 时有 $\partial^\alpha \varphi_0(x) \equiv 0$. 令 $k \rightarrow \infty$, 当 $x \in R_M^n$ 时, 由前式得:

$$M_m(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x) - \partial^\alpha \varphi_0(x)| \leq \varepsilon_j, \quad |\alpha| \leq m. \tag{10}$$

由此知 $\|\varphi_j - \varphi_0\|_m \rightarrow 0$, 即 $\{\varphi_j\}$ 在 $\widehat{\Phi}_m$ 中趋于 φ_0 . 此外,

$$M_m(x) |\partial^\alpha \varphi_0(x)| \leq \varepsilon_j + \|\varphi_j\|_m \tag{11}$$

故 $\|\varphi_0\|_m < \infty$. 于是 $\varphi_0 \in \widehat{\Phi}$. 这表明 $\widehat{\Phi}_m$ 为完备空间.

若上述基本列的函数 φ_j 都属于空间 $\Phi \equiv K\{M_k\}$, 则极限

φ_0 仍在 $\widehat{\Phi}_m$ 中. 因 Φ 依范 $\|\cdot\|_m$ 的完备化 Φ_m 乃对 Φ 中元组成的基本列取极限而得, 故 Φ_m 为 $\widehat{\Phi}_m$ 的线性子空间. 因 $\Phi = \bigcap_{j=1}^{\infty} \widehat{\Phi}_j$ 且 $\Phi \subset \Phi_j \subset \widehat{\Phi}_j$, 故有:

$$\Phi = K\{M_k\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Phi_j$$

且对任一 $\varphi \in \Phi$, 有:

$$\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \cdots \leq \|\varphi\|_m \leq \cdots \quad (12)$$

先证明一个一般性定理.

定理4 设线性空间 E 由单增范列(12)确定其局部凸拓扑, E_j 为 E 依范 $\|\cdot\|_j$ 的完备化, 则 E 为完备空间当且仅当 $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$.

证 设 $E = \bigcap E_j$ 且 $\{x_k\}$ 为 E 中基本列, 即依每个范 $\|\cdot\|_m$ 的基本列, 于是对某个 $x^{(m)} \in E_m$ 有 $x_k \rightarrow x^{(m)}$, $m=1, 2, \cdots$. 显然有 $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ 且所有 $x^{(m)} = x^* \in E$, 因对每个 m 有 $\|x_k - x^*\|_m \rightarrow 0$, 故在 E 中 $x_k \rightarrow x^*$, 故 E 为完备的. 反之, 设 E 为完备空间且 $x \in \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$, 则对每个 m , 存在 $x_m \in E$, 使 $\|x_m - x\|_m < \frac{1}{m}$. 对任一个 $n \leq m$, 由(1)有

$$\|x_m - x\|_n \leq \|x_m - x\|_m < \frac{1}{m},$$

故在 E_m 中 $x_k \rightarrow x$, 故 $\{x_k\}$ 是每个 E_m 中的基本列. 设在 E 中 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$, 则 $\|x_k - x^*\|_m \rightarrow 0$, 故对每个 m 有: $\|x - x^*\|_m = 0$, 于是 $x = x^* \in E$, 即 $E = \bigcap E_j$.

据引理1后的讨论及定理1, 即得

定理5 $K\{M_k\}$ 为 F 空间.

为了证明 $K\{M_k\}$ 是 FM 空间, 须引进条件:

(M) 对每个整数 $k \geq 1$, 存在整数 $k' > k$, 使对任意的 $\varepsilon > 0$, 相应地有 $N_0 > 0$, 当 $|x| > N_0$ ($x \in R_M^n$) 或当 $M_k(x) > N_0$ ($x \in R_M^n$) 时, 总有 $M_k(x) < \varepsilon M_{k'}(x)$.

当 $R_M = \emptyset$ 时, 条件 (M) 等价于条件: 对每个 $k \geq 1$, 存在 $k' > k$, 使

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)} = 0.$$

注意当条件 (M) 成立时, 对任何 $|\alpha| \leq k$, $\varphi \in K\{M_k\}$, 有:

$$M_k(x) \partial^\alpha \varphi(x) \rightarrow 0, \text{ 当 } |x| \rightarrow \infty \text{ 或 } M_k(x) \rightarrow \infty.$$

事实上, 若不然而对某 p 及 α , 存在列 $\{x_m\}$, 使

$$M_k(x_m) |\partial^\alpha \varphi(x_m)| \geq C > 0$$

$$(|x_m| \rightarrow \infty, \text{ 或 } M_k(x_m) \rightarrow \infty),$$

则有 $M_{k'}(x_m) |\partial^\alpha \varphi(x_m)| \rightarrow \infty$ ($m \rightarrow \infty$), 而与 $\|\varphi\|_{k'} < \infty$ 不符.

引理2 设条件 (M) 成立, $\{\varphi_j\} \subset K\{M_k\}$, 且各阶导数列 $\{\partial^\alpha \varphi_j\}$ 在 R^n 的任一有界集上一致收敛. 假定对任何 $k \geq 1$, $\|\varphi_j\|_k \leq C_k$ (即 $\{\varphi_j\}$ 为 $K\{M_k\}$ 中有界集), 则对任何 $k \geq 1$, $\|\varphi_j\|_k \rightarrow 0$, 即在 $K\{M_k\}$ 中有 $\varphi_j \rightarrow 0$.

证 对给定的 k , 取条件 (M) 中相应的 k' , 则对任意的 $\varepsilon > 0$, $x \in R_M^n$, 当 $|x| > N_0$ 或 $M_k(x) > N_0$ 时有

$$M_k(x) < \frac{\varepsilon}{C_{k'}} M_{k'}(x),$$

于是对 $|\alpha| \leq k$ 得

$$M_k(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{C_{k'}} M_{k'}(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{C_{k'}} \|\varphi_j\|_{k'} \leq \varepsilon.$$

使上式可能不成立的点的集 Γ 含于集 $|x| \leq N_0$ 或集 $M_k(x) \leq N_0$, 故可取 j_0 充分大, 使当 $j \geq j_0$ 时有

$$M_k(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x)| < \varepsilon \quad (x \in \Gamma),$$

于是对所有 $x \in R_M^n$, 当 $j \geq j_0$, 总有 $\|\varphi_j\|_k \leq \varepsilon$. 由 k 的任意性知引理成立.

推论1 若 $\{\varphi_j\} \subset K\{M_k\}$, $\|\varphi_j\|_k \leq C_k$ ($k \geq 1$)且在 R^n 任一有界集上一致有 $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi_0$ ($|\alpha| = 0, 1, \dots$), 则 $\varphi_0 \in K\{M_k\}$ 且在其中 $\varphi_j \rightarrow \varphi_0$.

事实上, (9)对任一个 j 及 $\varepsilon_j = 2C_k$ 成立, 使 $k \rightarrow \infty$ 即得(10)

及(11). 故对任何 $m \geq 1$ 有 $\|\varphi_0\|_m < \infty$. 由此知 $\varphi_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Phi_m =$

$K\{M_k\}$, 再对 $\{\varphi_j - \varphi_0\}$ 应用引理2即得推论.

定理6 若条件(M)成立, 则 $K\{M_k\}$ 为FM空间.

证 只须证 $K\{M_k\}$ 中有界集为相对列紧的. 设 A 为有界集, 则 $\|\varphi\|_m \leq C_m$, $\forall \varphi \in A$, $1 \leq m < \infty$. 因 $M_k(x) \geq 1$, 对每个 α , 集 $\{\partial^\alpha \varphi, \varphi \in A\}$ 为一致有界的. 应用 Ascoli-Arzelà 定理及对角化方法, 可得列 $\{\varphi_j\} \subset A$, 使各阶导数列 $\{\partial^\alpha \varphi_j\}$ 在 R^n 的任一有界集上一致收敛. 但 $K\{M_k\}$ 为完备空间, 故据推论1知 A 为相对列紧的.

定理7 若条件(M)成立且 $\text{int } \bar{R}_M^n \neq \emptyset$, 则 $K\{M_k\}$ 中的紧台函数作成稠的子线性空间.

证 由2.1.1(8)中的函数 $\varphi(x) = \varphi(x, 1, 1, 1)$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp \frac{-1}{1-r^2}, & r < 1, \\ 0, & r \geq 1, \end{cases} \quad r = |x|.$$

作函数

$$h(x) = C \int_{-2}^2 \varphi(r-\rho) d\rho,$$

显然有 $h(x) \in C_0^\infty(R^n)$; 适当选择 C 可使 $h(x) = 1$, $|x| < 1$. 当 $|x| > 3$ 时, $h(x) \equiv 0$. 对任一 $\varphi \in K\{M_p\}$, 令

$$\varphi_j(x) = \varphi(x) h\left(\frac{x}{j}\right),$$

因当 $|x| < j$ 时 $\varphi_j(x) = \varphi(x)$, 故对任一 α , 在 R^n 中任一有界集上一致有 $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$. 若能证

$$\|\varphi_j\|_k \leq C_k \quad (1 \leq k < \infty), \quad (13)$$

则据推论 1 知在 $K\{M_k\}$ 中 $\varphi_j \rightarrow \varphi$. 为证明 (5), 记

$$|\partial^\alpha h(x)| \leq C'_k, \quad |\alpha| \leq k, \quad x \in R^n.$$

这列常数 $\{C'_k\}$ 显然存在. 于是有

$$\left| \partial^\alpha h\left(\frac{x}{j}\right) \right| \leq C'_k, \quad |\alpha| \leq k, \quad x \in R^n,$$

应用 Leibniz 公式

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g \quad (14)$$

可得

$$M_k(x) |\partial^\alpha \varphi_j(x)| \leq C'_k C''_k \|\varphi\|_k,$$

取 $C_k = C'_k C''_k \|\varphi\|_k$, 即得 (13). 最后注意, 当 $\text{int } \bar{R}_M^n \neq \emptyset$, 则 $K\{M_k\}$ 含紧台函数.

推论 2 $K(N)$ 及 S 都是 FM 空间, $D = \bigcup_{j=1}^\infty K(|x| \leq j)$ 是 LF 空间.

对空间 $\mathcal{P} = Z\{M_k\}$ 可作类似的讨论. 记 $\widehat{\mathcal{P}}_m$ 为使 2.1.1 (6) 中范 $\|\psi\|_m < \infty$ 的整函数的集. 仿照引理 1 可证 $\widehat{\mathcal{P}}_m$ 为完备空间.

若记 Ψ_m 为 Ψ 按范 $\|\cdot\|_m$ 的完备化, 则 $\Psi \subset \Psi_m \subset \widehat{\Psi}_m$. 因 $\Psi = \bigcap_{j=1}^{\infty} \widehat{\Psi}_j$, 故有

$$\Psi \equiv Z\{M_k\} = \bigcap_{j=1}^{\infty} \Psi_j.$$

类似于定理 4 可得:

定理8 $Z\{M_k\}$ 为 F 空间.

类似于条件 (M) , 可引进条件 (M_0) :

(M_0) 对任一整数 $k \geq 1$, 存在整数 $k' > k$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)} = 0,$$

于是仿照定理可证明:

定理9 若条件 (M_0) 成立, 则 $Z\{M_k\}$ 为 FM 空间.

紧台函数不是整函数, 当然不能为 $Z\{M_k\}$ 中稠集.

最后引进权函数列 $\{M_j(x)\}$ 及 $\{M'_j(x)\}$ 的等价性概念.

若 $R'_M = \{x: M'_j(x) = \infty\}$ 重合于 R_M , 且对 $x \in R'_M$ 有

$$0 < C(k) \leq \frac{M_k(x)}{M'_k(x)} \leq C'(k) < \infty, \quad (15)$$

对列 $\{M_j(z)\}$ 可类似地引进等价列.

2.2.3 广函的导数与结构

先引进广函与乘子(见2.2.1定义3)的积.

定义5 设 $\sigma(x)$ 为检验空间 Φ 上乘子, 则对任一广函 $f \in \Phi'$, 积 σf 如下定义:

$$(\sigma f, \varphi) = (f, \sigma \varphi).$$

由乘子定义知上式右边为 Φ 上连续线性泛函, 故 $\sigma f \in \Phi'$. 映射 $f \mapsto \sigma f$ 显然为 Φ' 到 Φ' 的连续映射. 故 σ 也是 Φ' 上乘子.

利用Leibniz公式(14)可核验: 若在 $K\{M_k\}$ 中对任何 $p \geq r \geq 1$, 存在 $q \geq p$ 及常数 C_{pr} 使

$$M_p(x)M_r(x) \leq C_{pr}M_q(x),$$

则每个满足不等式

$$|\partial^\beta g(x)| \leq C_\beta M_{k(\beta)}(x) \quad (0 \leq |\beta| < \infty)$$

的函数 $g(x) \in C^\infty$ 是 $K\{M_k\}$ 上乘子; 上式中 $k(\beta)$ 为相应于 β 的 k . 特别, 满足不等式

$$|\partial^\beta g(x)| \leq C_\beta (1 + |x|)^{k(\beta)} \quad (0 \leq |\beta| < \infty)$$

的 C^∞ 函数 $g(x)$ 是 S 上乘子; 任一 C^∞ 函数是 $K(N)$ 上的乘子; 多项式是 $Z(a)$ 上的乘子.

定义6 设 Φ 为可微检试空间, 则任一广函 $f \in \Phi'$ 的导数 $\partial^\alpha f$ 如下定义:

$$(\partial^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi.$$

据可微检试空间定义知: 对任何 α , $\partial^\alpha f \in \Phi'$; 且有如下结果.

定理10 若 $\{f_j\}$ 在 Φ' 中弱或强收敛于 f , 则 $\{\partial^\alpha f_j\}$ 也在 Φ' 中弱或强收敛于 $\partial^\alpha f$.

定义6的根据如下: 若 $f(x)$ 在 R^n 中有连续导数且 $\varphi \in D(R^n)$, 则由分部积分有

$$\int \partial_i f(x) \varphi(x) dx = - \int f(x) \partial_i \varphi(x) dx = -(f, \partial_i \varphi)$$

这里及以后常略去积分号下的积分域 R^n . 上式表明由 $\partial_i f$ 确定的广函重合于由 $f(x)$ 确定的广函的导数. 以后在可能引起混淆的场合, 用 $[\partial_i f]$ 记通常导数. 广函 $\partial_i f$ 则称为 f 的弱导数或广义导数.

容易看出, 空间 $D(N)$, $D(R^n)$, S 及所有 $K\{M_k\}$ 都是可微空间, 故相应的广函都是无穷可微的 (当然是在弱导数意

义下). $Z(a)$ 也是可微空间. 事实上, 若 $\psi(z) \in Z(a)$, 则有

$$M_k(z) \left| \frac{\partial \psi(z)}{\partial z_j} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi_j - z_j| = 1} \frac{M_k(z)}{M_k(z')} \frac{M_k(z') |\psi(z')|}{|\xi_j - z_j|^2} |d\xi_j| \leq C_k \|\psi\|_k,$$

其中 $z' = (z_1, \dots, z_{j-1}, \xi_j, z_{j+1}, \dots, z_n)$, 常数 C_k 与 ψ 无关. 由此得:

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \right\|_k \leq C_k \|\psi\|_k.$$

这表明 $\frac{\partial \psi}{\partial z_j} \in Z\{M_k\}$ 且映射 $\psi \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial z_j}$ 为 $Z(a)$ 到自身的连续映射. 故 $Z(a)$ 上广函也是无穷可微的.

在可微检验空间 Φ 上, 无穷阶常系数算子 $A(\partial) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial^{\alpha}$

有定义, 只要对每个 $\varphi \in \Phi$, 级数 $A(-\partial)\varphi = \sum_{\alpha} a_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \partial^{\alpha} \varphi$

收敛. 对任何 $f \in \Phi'$, 可定义 $A(\partial)f$ 如下:

$$(A(\partial)f, \varphi) = (f, A(-\partial)\varphi), \quad \forall \varphi \in \Phi,$$

若 $A(-\partial)\varphi$ 在 Φ 的有界集上关于 φ 一致收敛, 则 $A(\partial)f \in \Phi'$, 即 A 为 Φ' 中有界算子.

现在考虑 $K\{M_k\}$ 上广函的结构问题.

设 f 为 $K\{M_k\}$ 上广函. 据 1.3.1 推论 4 及 2.1.1 定理 3 知 f 是某个 Φ_k 上的连续线性泛函. 对每个 $\varphi \in \Phi_k$, 有一一对应的 ν 维向量函数 $\{\psi\}$, 其分量是:

$$\psi_{\alpha}(x) = M_k(x) \partial^{\alpha} \varphi(x), \quad x \in R_M^n, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k$$

ν 就是分量的总个数. 设 Γ^{ν} 是 ν 个 Γ 的直积, 这里 Γ 由 R_M^n 上连

续并具有限范

$$\|h\| = \sup_{x \in R_M^n} |h(x)|$$

的所有函数 $h(x)$ 组成。 Γ^v 中范取为各分量的范之和。向量函数 $\{\psi\}$ 张成 Γ^v 的线性子空间 Δ^v 。因 $f \in \Phi'_k$ ，泛函 $L(\{\psi\}) = f(\varphi)$ 是 Δ^v 上的连续线性泛函，而可保范地延拓于 Γ^v 上得连续线性泛函 \hat{L} 。据Riesz表现定理， Γ^v 上的连续线性泛函 \hat{L} 取形：

$$\hat{L}(\theta) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{R_M^n} \theta_\alpha(x) d\sigma_\alpha(x), \quad \theta = \{\theta_\alpha\},$$

其中 $\sigma_\alpha(x)$ 为有界变差函数或测度。这就给出

定理11 $K\{M_k\}$ 上的任一广函 f 具形

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{R_M^n} M_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) d\sigma_\alpha(x), \quad (16)$$

$m \geq 1$ 为某个整数，且 $f \in \Phi'_m$ 的范为

$$\|f\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{R_M^n} |d\sigma_\alpha(x)|.$$

为了得到广函的更方便的表示，对权函数列 $\{M_k\}$ 作如下要求：

(N_1) 对每个 $k \geq 1$ ，存在 $k' \geq k$ ，使

$$m_{kk'}(x) = \frac{M_k(x)}{M_{k'}(x)} \in L(R_M^n);$$

(N_2) 对每个 $k \geq 1$ ，存在 $k'' \geq k$ ，使对任何 $x \in R_M^n$ ，

$$\frac{M_k(x)}{M_{k''}(x')} \leq C_k, \quad |x' - x| \leq 1.$$

现在证明2.2.1(3)中范列等价于范列

$$\|\varphi\|'_k \equiv \sup_{|\alpha| \leq k} \int_{R_M^n} M_k(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| dx. \quad (17)$$

首先设 $x \in R_M^n$, 则由 (N_1) 有

$$\begin{aligned} M_k(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| &= m_{kk'}(x) M_{k'}(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ &\leq m_{kk'}(x) \|\varphi\|_{k'}, \end{aligned}$$

两边沿 R_M^n 积分即得

$$\|\varphi\|'_k \leq B_k \|\varphi\|_{k'}, \quad (B_k = \int_{R_M^n} m_{kk'}(x) dx). \quad (18)$$

其次, 对任意的 $x \in R^n$, 可证明不等式

$$|\varphi(x)| \leq A \sum_{|\beta| \leq q} \int_{|\xi-x| < 1} |\partial^\beta \varphi(\xi)| d\xi, \quad (19)$$

其中 A 与 q 不依赖于 φ . 为证 (19), 取 $r(t) \in C_0^1(R^1)$, 使 $r(0) = 1$, $r(t) = 0$, $\forall |t| \geq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ 固定. 因

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= r(0)\varphi(x) - r(-\varepsilon)\varphi(x_1 - \varepsilon, x_2, \dots, x_n) \\ &= \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} [r(\xi_1 - x_1)\varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n)] d\xi_1 \\ &= \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi_1} \varphi + r \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) d\xi_1, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq A_0 \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1} |\varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n)| d\xi_1 + \\ &\quad + A_0 \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n) \right| d\xi_1. \end{aligned}$$

对 $\varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n)$ 及 $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi(\xi_1, x_2, \dots, x_n)$ 作类似的处理, 而

换 $x_1, r(x_1)$ 为 $x_2, r(x_2)$ 等, 并取 ε 使 $\varepsilon\sqrt{n} < 1$, 即得 (19), 且

$q = n$.

在(19)中换 φ 为 $\partial^\alpha \varphi$, 并取 $k'' \geq k + q$. 当 $x \in R_M^n$ 时, 得

$$\begin{aligned} & M_k(x) |\partial^\alpha \varphi(x)| \\ & \leq A \sum_{|\beta| < q, |x - \xi| < \frac{1}{2}} \int_{\xi \in R_M^n} \frac{M_k(x)}{M_{k''}(\xi)} M_{k''}(\xi) |\partial^{\alpha+\beta} \varphi(\xi)| d\xi \\ & \leq A' C_k \|\varphi\|_{k''}', \end{aligned}$$

A' 为常数, 上式表明,

$$\|\varphi\|_k \leq A' C_k \|\varphi\|_{k''}'. \quad (20)$$

(20)与(18)表明范列 $\{\|\cdot\|_k\}$ 与 $\{\|\cdot\|_{k''}'\}$ 为等价的. 故在定理 N 的证明中可换 $\|\cdot\|_k$ 为 $\|\cdot\|_{k''}'$, 而在空间 Γ^v 上取范

$$\|\theta\| = \sum_{j=1}^v \int_{R_M^n} |\theta_j(x)| dx, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_v) \in \Gamma^v, \quad (21)$$

因具范(21)的空间 Γ^v 上的连续线性泛函 T 具形:

$$T(\theta) = \sum_{j=1}^v \int_{R_M^n} \theta_j(x) g_j(x) dx$$

其中 $g_j(x) \in L^\infty(R_M^n)$, $j = 1, \dots, v$. 于是得如下结果.

定理12 设条件 (N_1) 及 (N_2) 成立, 则 $K\{M_k\}$ 上任一广函 f 具形

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{R_M^n} M_m(x) f_\alpha(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx, \quad (22)$$

m 为某正整数, $f_\alpha(x)$ 都是殆遍有界可测函数, 且

$$\|f\|_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \operatorname{ess\,sup}_{x \in R_M^n} |f_\alpha(x)|. \quad (23)$$

考虑Schwartz急降空间 $S \equiv K\{(1 + |x|)^k\}$. 条件 (N_1) 及 (N_2) 显然成立, 且 $R_M^n = R^n$. 这时(22)右边的每一项可改写

为

$$(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (M_k f_\alpha)(\varphi), \quad (24)$$

其中 $M_k f_\alpha$ 为 S 上函数型广函。对每个积分

$$I_i = \int_0^x M_k f_\alpha dx_i, \quad i = 1, \dots, n$$

可得 S' 中元 $\partial_i I_i = M_k f_\alpha$ 。对多重积分有同样结果。故(24)中每个泛函可表为 $\alpha^\beta g_\alpha$ ，且对所有 α, β 是同一的，而 g_α 则为 R^n 上满足不等式

$$|g_\alpha(x)| \leq A_\alpha (1 + |x|)^{m_\alpha}$$

的连续函数。总结上述，即得下面的结论。

定理13 S 上每个广函 f 取形

$$f = \alpha^\beta [(1 + |x|^2)^m F(x)], \quad (25)$$

其中 $F(x)$ 是 R^n 上的有界连续函数；故 f 称缓增(幂增)广函。

设 f 在 S' 的有界集 B' 中变动。据2.1.1定理3， B' 含于某 Φ_m 中且依其中范 $\|\cdot\|_m$ 有界。故(22)中的 m 对所有 $f \in B'$ 是同一的，且数集(23)也是有界的。类似于定理13的证明，可得如下结果。

定理14 设 B' 为 S' 中有界集，则对每个 $f \in B'$ ，存在表示式(25)，且 β 与 m 是相同的。此外，连续函数集 $\{F(x) | f \in B'\}$ 在 R^n 上是一致有界的。

2.3 分布理论

2.3.1 空间 D 与分布

设 $\Omega = \{\Omega_0 = \emptyset, \Omega_1, \Omega_2, \dots\}$, $\Omega_j = \{x_j | |x| < j\}$; $\{e\} = \{e_0, e_1, \dots\}$ 为单降于零的任意正数列; $\{m\} = \{m_0, m_1, \dots\}$ 为单

增于 ∞ 的任意非负整数列。于是可在空间 $C_0^\infty(R^n)$ 引进集合

$$V(\{m\}, \{\varepsilon\}) = \{\varphi(x); \varphi \in C_0^\infty(R^n), |\partial^\alpha \varphi| < \varepsilon_j, \\ |\alpha| \leq m_j, x \notin \Omega_j\}.$$

虽然 $j = 0, 1, \dots$ 是可列集，但因 V 随 $x \notin \Omega_j$ 而不同，故把所有的 V 作为 C_0^∞ 的零元邻域基时，并不满足第一可列公理。记 C_0^∞ 具备上述拓扑所得的拓扑线性空间为 D 或 \mathcal{D} 。注意 D 是局部凸的，但不可度量化。 D 也可看作空间列 $\{D(\overline{\Omega}_j), j = 1, 2, \dots\}$ 的并。由于 $D(\overline{\Omega}_j)$ 都是 F 空间， D 是 LF 空间。

记 $D(G)$ 为台含于 G 的所有 $\varphi \in D$ 的集。

设 K 为 R^n 中某个紧集， $\{M\} = \{M_0, M_1, \dots\}$ 为单增正数列。记

$$B(\{M\}, K) = \{\varphi; \varphi \in D(K), |\partial^\alpha \varphi| \leq M_m, \\ |\alpha| \leq m, m = 0, 1, \dots\}.$$

定理1 集 $W \subset D$ 在 D 中有界当且仅当：它含于某个 $B(\{M\}, K)$ ，即： W 中所有 φ 的台含于同一紧集 K ，且对每个 α ，集 $\{\partial^\alpha \varphi; \varphi \in W\}$ 一致有界。

证 由1.2.4定义5知，若对 D 中任一零元邻域 V ，存在 $\lambda > 0$ 使 $W \subset \lambda V$ ，则 W 为 D 中有界集。由此知每个 $B(\{M\}, K)$ 为 D 中有界集。故若 W 含于这种集中， W 必为有界集。反之，设 W 为有界集。先证 W 中所有 φ 的台含于同一有界集。如果不然，则存在列 $\{\varphi_j\} \subset W$ ， $\{x_j\} \subset R^n$ ，使 $\varphi_j(x_j) \neq 0$ ， $|x_j| > j$ 。选 $\varepsilon_j = |\varphi_j(x_j)|/j$ 及任意的 $\{m\}$ 。于是 W 对任何 $\lambda > 0$ 不含于 $\lambda V(\{m\}, \{\varepsilon\})$ ，而与 W 的有界性假定不符。故对某个紧集 K ，有 $W \subset D(K)$ 。当 $\delta > 0$ 充分小时， δW 含于 D 的任一零元邻域中，故关于 $\varphi \in W$ 一致有 $|\partial^\alpha \varphi| \leq M_\alpha$ 。取 $M_m = \max_{|\alpha| \leq m} M_\alpha$ ，即知 $W \subset B(\{M\}, K)$ 。

定义1 D 的对偶空间 D' 中元称为分布.

定理2 D 上线性泛函 f 为连续的, 当且仅当对任一紧集 $K \subset R^n$, f 在 $D(K)$ 上的缩射为连续泛函.

据1.4.1推论1, 定理2的等价表述如下:

定理2' D 上线性泛函 f 为连续的, 当且仅当对每个有界集 $B \subset D$, $f(B)$ 为有界集.

定理2的证明依据下面的定理.

定理3 D 中凸集 W 为零元邻域, 当且仅当对任一紧集 $K \subset R^n$, $W \cap D(K)$ 为 $D(K)$ 的零元邻域.

证 显然, $V(\{m\}, \{\varepsilon\}) \cap D(K)$ 为 $D(K)$ 的零元邻域. 因 D 的每个零元邻域总含有某个 $V(\{m\}, \{\varepsilon\})$, 故必要性得证. 为证充分性, 取 $K = \{x; |x| \leq k+2\}$. 注意对任一 $k \geq 0$, 存在整数 $m_k \geq 0$ 及正数 η_k , 使当 $\varphi \in D$, $\text{supp } \varphi \subset \{x; |x| \leq k+2\}$, 且

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \eta_k, \quad |\beta| \leq m_k$$

时, 必有 $\varphi \in W$. 不失一般性, 可取 $\{m_k\}$ 单增到 ∞ .

据1.6.4定理9, 存在 R^n 上的单位分解 $\{\alpha_k(x)\}$, 使 $\text{supp } \alpha_k \subset \{x; k \leq |x| \leq k+2\}$. 于是可把每个 $\varphi \in D$ 表为

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} \alpha_k \varphi).$$

因 W 为凸集, 若对每个 k 有 $2^{k+1} \alpha_k \varphi \in W$, 即有 $\varphi \in W$.

其次可注意, 若

$$|\partial^\beta \varphi(x)| \leq \varepsilon_k, \quad |\beta| \leq m_k, \quad |x| \geq k,$$

则 $|2^{k+1} \partial^\beta (\alpha_k \varphi)| \leq A_k \varepsilon_k$, $\forall x \in R^n$, A_k 为与 φ 及 ε_k 无关的常数. 故若取 $\{\varepsilon_k\}$ 单降于零且使 $A_k \varepsilon_k < \eta_k$, 则 $\varphi \in V(\{m\}, \{\varepsilon\})$ 表明 $2^{k+1} \alpha_k \varphi \in W$. 故 $\varphi \in W$, 即 W 为 D 中零元邻域.

取 $K_m = \{x; |x_j| \leq m, j = 1, \dots, n\}$, 由定理3的证明知

有:

推论1 D 是空间列 $\{K(m), m=1, 2, \dots\}$ 的严格归纳极限.

定理2是2.1.3推论7及上一推论的结果.由此知 D 是2.2.1定义1意义下的检试空间.

推论2 D 是完备空间(在基本列意义下).

这是定理3及2.1.3定理15的推论.

容易直接核验, D 中有界集为相对紧的,故 D 为Montel空间.附带提到而不作证明, M 空间是自反的,且其对偶空间也是 M 空间.

由2.1.3推论7及定理16,还可得如下结论.

定理2'' D 上线性泛函 f 为连续的,当且仅当对 D 中列 $\varphi_j \rightarrow 0$ 有 $f(\varphi_j) \rightarrow 0$.

定理4 D' 为完备空间.

上述所有结果也适用于 $D(G)$ 及其对偶空间 $D'(G)$,这里 G 为 R^n 中开集.这时在 $V(\{m\}, \{\varepsilon\})$ 中只须取 $\Omega = \{\Omega_0 = \emptyset, \Omega_1, \dots\}$,使 $\Omega_j \subset \Omega_{j+1} \subset G, j=1, 2, \dots$,且 G 的每个紧子集含于某个 Ω_j 中.

关于 D 为 $C^\infty(R^n)$ 中稠集以及 D' 中分布的初等运算,例如以 $a(x) \in C^\infty(R^n)$ 相乘及微分运算等,因为已有较多中文书论及,所以不再重复.这里只强调一下, D 在 $C^0(R^n)$ 中也是稠集,为此只须取函数 $\beta_\varepsilon(x) \in D$,使当 $|x| < \frac{1}{\varepsilon}$ 时, $\beta_\varepsilon(x) = 1$.

则对任一函数 $f(x) \in C^0$,有 C^∞ 中列 $\{f_\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon(x)f(x)\}$ ($\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \dots$) 在 C^0 中收敛于 f ,即 C^∞ 在 C^0 中稠;随之 D 也在 C^0 中稠.

2.3.2 分布的唯一确定

空间 D 显然满足2.2.1定理3的条件1)–2), 故 D 上分布唯一确定. 现在作进一步的讨论. 但须提到, 对任一空间 $D(K)$ (K 为 R^n 中任意紧集)都不满足条件1), 故 $D(K)$ 上分布非唯一确定.

定义2 给定开集 $\Omega \subset R^n$. 若对所有 $\varphi \in D(\Omega)$ 有 $f(\varphi) = 0$, 即称分布 f 在 Ω 上为零(零分布); 若在 Ω 上 $f_1 - f_2 = 0$, 称在 Ω 上 $f_1 = f_2$. 定义分布 f 的台为

$$\operatorname{supp} f = \{x; x \in R^n, x \text{ 不具备任何邻域 } \omega, \text{ 使 } f \text{ 在 } \omega \text{ 上为零}\}.$$

据定义知 $\operatorname{supp} f$ 为 R^n 中闭集.

定理5 设 $\{\Omega_j\}$ 为开集 Ω 的开覆盖列, $\{f_j\}$ 为分布列, f_j 定义于 Ω_j . 假定当 $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$ 时, 在交集上即有 $f_j = f_k$. 则存在定义于 Ω 的唯一分布 f , 使在每个 Ω_j 上有 $f = f_j$.

证 设 $\{\alpha_j\}$ 为相应于 $\{\Omega_j\}$ 的单位分解, 则有

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \varphi, \quad \forall \varphi \in D, x \in R^n,$$

因 $\operatorname{supp} \varphi$ 只与有限个 $\operatorname{supp} \alpha_j$ 相交, 上式右边仅含有限个项. 故若 f 存在, 应有

$$f(\varphi) = \sum_j f(\alpha_j \varphi) = \sum_j f_j(\alpha_j \varphi).$$

这表明 f 唯一地确定. 上式右边还可用以建立分布 f 的存在性. 显然, 如此确定的泛函 f 显然为线性的. 为证其连续性, 只须对任一紧子集 $K \subset \Omega$, 证明 f 在 $D(K)$ 上的连续性(见2.3.1定理2). 当 $\varphi \in D(K)$ 时, 级数 $\sum_j f_j(\alpha_j \varphi)$ 只含有限项. 因每个

f_j 连续, 故 f 也连续.

剩下须证明在 Ω_j 上 $f = f_j$. 设 $\varphi \in D(\Omega_j)$, 则 $\text{supp } \alpha_k \varphi \subset \Omega_j \cap \Omega_k$, 故若 $\alpha_k \varphi \equiv 0$, 则 $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$. 据假定, $f_j(\alpha_k \varphi) = f_k(\alpha_k \varphi)$, 对 k 作和得所需结果.

$$f_j(\varphi) = \sum_k f_j(\alpha_k \varphi) = \sum_k f_k(\alpha_k \varphi) = f(\varphi).$$

推论3 若在每个开集 Ω_j 上 $f = 0$, 则在并 $\Omega^* = \bigcup_j \Omega_j$ 上 $f = 0$. 若在每个 Ω_j 上 $f_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$), 则在 Ω^* 上有 $f_m \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$).

定理6 设 K 为 R^n 中紧集. 对给定分布 f , 存在整数 $m \geq 0$, 使当 $\varphi_j \in D(K)$ 且 $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), $|\alpha| \leq m$, 则有 $f(\varphi_j) \rightarrow 0$.

证 f 为 $D(K)$ 上连续泛函, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $D(K)$ 中零元邻域 $V(m, \eta, K) = \{\varphi; \varphi \in D(K), |\partial^\alpha \varphi| < \eta, |\alpha| \leq m\}$, 使当 $\varphi \in V$ 时, $|f(\varphi)| \leq \varepsilon$. 固定 ε , 则对任何 $\lambda > 0$, 关系 $\varphi \in V(m, \lambda\eta, K)$ 表明 $|f(\varphi)| \leq \lambda\varepsilon$. 取 λ 充分小, 即得所需.

应用 2.2.3 定理 12, 并注意对于 $D(K)$ 有 $M_k(x) \equiv 1$, $x \in R_M^*$, 可得如下结果.

定理7 具紧台 K 的任一分布 f 具形:

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha F_\alpha(x), \quad (1)$$

其中 F_α 都是连续函数, 且 $\text{supp } F_\alpha$ 含于 K 的任何给定邻域 U .

注1 U 一般不能换为 K , 如 Schwartz 所举例子所示. 考虑 $D(R^1)$ 上如下定义的分佈:

$$(f, \varphi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{1}{j}\right) - m\varphi(0) - \varphi'(0) \ln m \right],$$

$$\forall \varphi \in C^\infty(R^1)$$

显然, f 具紧台 $\text{supp} f = K = \{0, 1, \frac{1}{2}, \dots\}$. 作展式

$$\varphi\left(\frac{1}{j}\right) = \varphi(0) + \varphi'(0) \frac{1}{j} + \varphi''\left(\frac{\theta_j}{j}\right) \frac{1}{2j^2}, \quad 0 < \theta_j < 1,$$

记 $C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right]$, 有

$$(f, \varphi) = C\varphi'(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi''\left(\frac{\theta_j}{j}\right)}{2j^2}.$$

由此可核验 f 为 C^∞ 上广函. 但若取 $\varphi_k(x) \in D \subset C^\infty$, 使

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & x \geq \frac{1}{k}, \\ 0, & x \leq \frac{1}{k+1}. \end{cases}$$

注意 $|\varphi_k(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$, 故当 $k \rightarrow \infty$ 时, φ_k 一致趋于零, 且各阶

导数在 K 上为零 (在 K 外不为零). 由于 $\frac{1}{j} \geq \frac{1}{k}$ 的 j 只有 $j=1, \dots, k$ 共 k 个, 因此有:

$$(f, \varphi_k) = \frac{k}{\sqrt{k}} = \sqrt{k} \rightarrow \infty,$$

故不能只要求 φ_k 的各阶导数只在 $K = \text{supp} f$ 上趋于零或等于零, 即这个分布不能用 $\text{supp} F_\alpha = K$ 的函数 F_α 表为 (1) 的形式. 关于在何种紧台上可取 $U = K = \text{supp} f$, 参看 L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, I, pp. 95, 98, 2nd ed., Hermann, Paris, 1966. 那里引进了正规台的概念. 可提到, 有界闭

域是正规台；有限点集也是正规台。可注意，为简单计，在 2.2.1 中曾要求 R^n 含内点。

定理 8 设 Ω 为 R^n 中有界开集，则任一分布 f 在 Ω 上可表为 $f = \partial^m F(x)$ ， m 为某非负整数， $F(x)$ 为连续函数，且 $\text{supp} F$ 含于 $\overline{\Omega}$ 的任意邻域中。

只须取 $K = \overline{\Omega}$ 再应用定理 7。

推论 4 设 Ω 为有界开集，则 $D(\Omega)$ 上每个分布 f 为有限阶的。

推论 5 设分布 f 具紧台 K ，则存在非负整数 m ，使当 $\varphi \in D$ 且 $\partial^\alpha \varphi|_K \equiv 0$ ($|\alpha| \leq m$) 时， $f(\varphi) = 0$ 。

定理 9 任一分布 f 可表为

$$f = \sum_j \partial^{\beta_j} F_j(x), \quad (2)$$

其中 F_j 都是紧台连续函数， $\text{supp} F_j$ 含于 $\text{supp} f$ 的任意邻域中，且 (2) 的右边是局部有限项和。

证 取 $\text{supp} f$ 的有界开覆盖列 $\{\Omega_j\}$ 及相应单位分解 $\{\alpha_j(x)\}$ ，记 $f_j = \alpha_j f$ ， $f = \sum_j f_j$ 。因每个 f_j 具紧台，故可应用定理 7 而得 (2)。

利用推论 3 及定理 9，仿照 2.2.1 定理 3 的证明处理有限阶广函，即知 D' 中分布唯一确定。

为了深入考察紧台分布，引进空间 \mathcal{E} 。在 $C^\infty(R^n)$ 中构造如下的零元邻域基

$$V(m, \varepsilon, K) \equiv \{\varphi; \varphi \in C^\infty(R^n), \quad |\partial^\alpha \varphi(x)| < \varepsilon, \\ |\alpha| \leq m, x \in K\}.$$

这里 m 为任意非负整数， ε 为任意正数， K 为 R^n 中任一紧集。

具备这种拓扑的空间 C^∞ 通记为 \mathcal{E} . \mathcal{E} 也可由 C^∞ 及如下范列

$$\|\varphi\|_m = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{|x| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad m=1, 2, \dots$$

确定. 显然, \mathcal{E} 为 FM 空间, 且含 D 为稠子空间.

记 \mathcal{E} 的对偶空间为 \mathcal{E}' , 有 $\mathcal{E}' \subset D'$. \mathcal{E}' 中分布 f 必具紧台. 不然则存在列 $\{\varphi_j\} \subset D$, 使 $\text{supp } \varphi_j$ 位于 $|x| \geq j$ 中, $j=1, 2, \dots$, 且 $f(\varphi_j)=1$. 这与在 \mathcal{E} 中 $\varphi_j \rightarrow 0$ 矛盾. 反之, 设 f_0 为紧台分布, 则至少存在一个 $f \in \mathcal{E}'$, 使在 D 上 $f=f_0$. 事实上, 对任何 $\varphi \in \mathcal{E}$ 及某个 $\alpha \in D$, 只要在 $\text{supp } f_0$ 的某邻域中 $\alpha=1$, 可令 $f(\varphi)=f_0(\alpha\varphi)$, 由于 D 在 \mathcal{E} 中稠, 即得所需的 f . 这样确定的 f 与 α 的选择并无关系. 因若 $\beta \in D$ 且在 $\text{supp } f_0$ 的某邻域中 $\beta=1$, 则 $\text{supp}(\alpha-\beta) \cap \text{supp } f_0 = \emptyset$, 故有

$$f_0(\alpha\varphi) - f_0(\beta\varphi) = f_0((\alpha-\beta)\varphi) = 0,$$

即 $f_0(\alpha\varphi) = f_0(\beta\varphi)$. 总结以上讨论, 得如下定理.

定理10 \mathcal{E}' 是具紧台的分布的空间.

最后考虑台仅含一点的分布.

定理11 设分布 f 的台仅含一点 x_0 , 则有唯一表示

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta(x-x_0), \quad (3)$$

m 为与 f 有关的非负整数, c_α 都是常数(实或复值), 在点 x_0 的Dirac测度 $\delta(x-x_0)$ 如下定义

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0);$$

$$(\partial^\alpha \delta(x-x_0), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(x_0)$$

证 不妨取 $x_0=0$. 为证唯一性, 把(3)的两边作用于 x^k 得

$$f(x^k) = c_k (\partial^k \delta, x^k) = (-1)^k c_k k!, \quad (4)$$

故 c_k 唯一确定. 为证表示式(3)的存在性, 注意 f 必为有限阶

广函。设其阶 $\leq m$ 。由推论 5 知：当 $\psi \in \mathcal{S}$ 且 $\partial^\alpha \psi(0) = 0 (|\alpha| \leq m)$ ，即有 $f(\psi) = 0$ 。特别取

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D,$$

于是由 $f(\psi) = 0$ 得

$$f(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} f(x^\alpha) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha \varphi(0).$$

这里用到(4)。由 δ 测度的定义即得(3)。

2.3.3 分布的卷积

当 $f, g \in L(R^n)$ 时，它们的卷积 $f \cdot g$ 如下定义

$$(f \cdot g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

且有 $f \cdot g = g \cdot f \in L(R^n)$ 。把上式两边作用于 $\varphi \in D$ 得：

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(\varphi) &= \int dx \int f(x-y)g(y)\varphi(x)dy \\ &= \int g(y)dy \int f(x-y)\varphi(x)dx \\ &= \int g(y)dy \int f(x)\varphi(x+y)dx. \end{aligned}$$

假定积分顺序可交换。上式可改写为

$$\begin{aligned} \langle f \cdot g, \varphi \rangle &= \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\ &\equiv \langle g(y) \otimes f(x), \varphi(x+y) \rangle. \end{aligned}$$

为避免积分收敛性讨论，假定分布 f 及 g 中有一具紧台，例如 $\text{supp} f = K$ 为紧集，则可定义

$$(f \cdot g)(\varphi) = \langle f \otimes g, \varphi(x+y) \rangle. \quad (5)$$

为证明上式右边有意义，注意 $f \otimes g$ 的台含于 $K \times R^n$ 。记 $\text{supp} \varphi = A$ ，则由(5)右边应有 $(x, y) \in K \times R^n$ ， $x+y \in A$ ，即

$(x, y) \in K \times (A - K)$. 因 $K \times (A - K)$ 为有界集, 故(5)的右边有意义. 也可改写(5)为

$$(f \cdot g)(\varphi) = \langle f(x) \otimes g(y), \alpha(x) \varphi(x + y) \rangle, \quad (6)$$

其中 $\alpha \in D$, 且在 K 的邻域中 $\alpha = 1$.

由(5)知有 $f \cdot g = g \cdot f$.

定理12 设 $f \in \mathcal{E}'$, $g \in D'$, 则存在 $f \cdot g \in D'$, 且

$$\text{supp } f \cdot g \subset \text{supp } f + \text{supp } g. \quad (7)$$

这里集和为向量和: $A + B = \{x + y; \forall x \in A, y \in B\}$.

证 $f \cdot g$ 作为线性泛函存在性, 由(5)右边有定义而得证, 剩下须证 $f \cdot g$ 的连续性. 当 φ 在有界集 $B \subset D$ 中变动时, 则 $\alpha(x) \varphi(x + y)$ 在 $D(R^n \times R^n)$ 的有界集中变动, 这时(6)右边的数集为有界集. 因(6)的右边等于(5)的右边, 故 $f \cdot g$ 在 D 的有界集上有界. 据2.3.1定理2', $f \cdot g$ 为连续线性泛函.

为证明(7), 注意 $\text{supp } f + \text{supp } g$ 为闭集, 其余集 Ω 为开集, 故须证: 当 $\varphi \in D(\Omega)$, 即有 $\langle f \cdot g, \varphi \rangle = 0$. 因

$$\text{supp } \varphi(x + y) \subset \{(x, y); (x, y) \in R^n \times R^n, x + y \in \Omega\},$$

而 $\text{supp } f(x) \otimes g(y) = \text{supp } f \times \text{supp } g \subset \{(x, y); x + y \in \text{supp } f + \text{supp } g, (x, y) \in R^n \times R^n\}$, 但 $\Omega \cap (\text{supp } f + \text{supp } g) = \emptyset$, 故 $\text{supp } \varphi(x + y) \cap \text{supp } f \otimes g = \emptyset$. 由(5)知有 $\langle f \cdot g, \varphi \rangle = 0$, 故(7)成立.

设 f, g, h 为分布, 至少有两个属 \mathcal{E}' , 则可核验

$$\begin{aligned} \langle (f \cdot g) \cdot h, \varphi \rangle &= \langle f \cdot (g \cdot h), \varphi \rangle \\ &= \langle f \otimes g \otimes h, \varphi(x + y + z) \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

对任意分布 $f \in D'$, 总有

$$\delta \cdot f = f, \quad \partial^a(\delta \cdot f) = (\partial^a \delta) \cdot f. \quad (9)$$

若 $f \in \mathcal{E}'$, $g \in D'$, 则有

$$\partial^a(f \cdot g) = (\partial^a f) \cdot g = f \cdot (\partial^a g). \quad (10)$$

定理13 设 $f \in D'$, 则对任何 $a \in D$, 有 $f * a \in C^\infty$.

证 记 $\theta(x) = \langle f(y), a(x-y) \rangle$, 有 $\partial^\alpha \theta(x) = \langle f(y), \partial_x^\alpha a(x-y) \rangle$, 故 $\theta \in C^\infty$. 另一方面, 对任一个 $\varphi \in D$, 有

$$\begin{aligned} (f * a)(\varphi) &= \langle f(y), \int a(x) \varphi(x+y) dx \rangle \\ &= \langle f(y), \int a(x-y) \varphi(x) dx \rangle \\ &= \langle f(y) \otimes \varphi(x), a(x-y) \rangle \\ &= \langle \varphi(x), \langle f(y), a(x-y) \rangle \rangle = \langle \theta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

故 $f * a = \theta \in C^\infty$.

特别取列 $\{a_j\} \subset D$, 使在 D' 中 $a_j \rightarrow \delta$, 例如

$$a_j(x) = \begin{cases} A j^n \exp \frac{-1/j^2}{\frac{1}{j^2} - |x|^2}, & |x| < \frac{1}{j}; \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{j}, \end{cases}$$

且 A 取得使 $\int a_j(x) dx = 1$. 则有

$$f * a_j \rightarrow f \quad (\text{在 } D' \text{ 中}), \quad (11)$$

而称为分布 f 的光滑化列. 于是得

定理14 D 在 D' 的弱拓扑下为稠集.

卷积还可用以讨论函数或方程的解的光滑性. 设 $P(\partial) =$

$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ 为常系数线性微分算子, 则 P 的基本解 F 定义为方

程

$$P(\partial)F = \delta(x) \quad (12)$$

在 D' 中的解, 即 $F \in D'$ 使下式

$$\langle F, P(-\partial)\varphi \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle$$

对每个 $\varphi \in D$ 成立. F 也称为相应方程 $P(\partial)u = 0$ 的基本解. 例如, 多重 Laplace 方程

$$\Delta^k u = 0$$

的基本解具形

$$F_{k, n} = r^{2k-n} (A_{k, n} \ln r + B_{k, n}), \quad (13)$$

事实上, 注意 $\Delta^{k-1}(\Delta F_{k, n}) = \Delta^{k-1} F_{(k-1), n} = \delta$, 故有

$$\Delta F_{k, n} = F_{(k-1), n},$$

即可递推求解. 由于算子 Δ 有球对称性, 自然考虑解为 r 的函数. 为此先解方程

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r) = g(r). \quad (14)$$

令 $f'(r) = h(r)$, 得一阶方程, 于是可得(14)的解为

$$f(r) = \int r^{1-n} \left\{ \int^r \rho^{n-1} g(\rho) d\rho \right\} dr. \quad (15)$$

已知(可直接核验) $F_{1, n} = B_{1, n} r^{2-n} (n > 2)$, $F_{1, 2} = A_{1, 2} \ln r$, 故由(15)可逐次算出(13)的一般结果

$$F_{k, n} = \begin{cases} B_{k, n} r^{2k-n}, & \text{当 } n \text{ 为奇数或 } n = 2n_1 > 2k; \\ A_{k, n} r^{2k-n} \ln r, & \text{当 } n = 2n_1 \leq 2k. \end{cases} \quad (13')$$

注意当 $2k > n$ 时, $F_{k, n} \in C^{2k-n-1}(R^n)$.

定理15 若布分 f 的所有弱导数都属于某固定的 $(C_0^\infty)'$, 则 f 为 C 函数.

证 只须考虑 $\text{supp } f$ 为紧集的情形, 因一般情形可利用单位分解化为这种情形: $f = \sum_j a_j f$. 记 $g = \Delta^k f$, 则 f 可用 Δ^k

的基本解 F 表为

$$f = F * g. \quad (16)$$

事实上, $f = \delta * f = (\Delta^k F) * f = F * \Delta^k f = F * g$. 取 k 使 $2k - n - 1 \geq m$, 则 $F \in C^m$. 因 $g = \Delta^k f \in (C_0^\infty)'$, 故分布

$$f = F * g = \langle g(y), F(x-y) \rangle$$

为 x 的连续函数(对照定理13). 同样得知 f 的每个弱导数为连续函数, 故 $f \in C^\infty$.

定理16 设 $f \in D'$, 若对每个 $a \in C_0^\infty$, m 固定, 总有 $f * a \in C^\infty$, 则 $f \in C^\infty$.

证 取 $h \in D$, 使在 R^n 的某零元邻域中 $h = 1$. 对充分大的 k , $hF \in C^{2k-n-1}$, 且 $\text{supp } hF$ 为紧集. 记

$$\Delta^k(hF) = \delta + \varphi.$$

显然 $\varphi \in D$. 于是 $\delta = \Delta^k(hF) - \varphi$, 故有

$$f = \delta * f = \Delta^k(hF * f) - \varphi * f, \quad (17)$$

取 k 使 $a = hF \in C^m$, 即知 $f \in C^\infty$.

注意定理16也可用(16)证得; 另一方面, 定理15也可利用(17)而得.

定理17 设 $g \in C^\infty(\Omega)$, Ω 为 R^n 中开集, f 为方程 $\Delta^k f = g$ 在 Ω 中的分布解, 则 $f \in C^\infty(\Omega)$.

证 只须考虑 Ω 为有界集的情形; 一般情形可利用单位分解. 对 Ω 的任一开子集 ω , 只要 $\bar{\omega} \subset \Omega$, 取点 $x = 0$ 的充分小邻域 W , 使 $\omega_0 - W \subset \Omega$. 设 $h \in D(W)$, 且在 $x = 0$ 的某邻域中 $h = 1$. 则 $hF * \Delta^k f$ 在 ω 上仅依赖于 $\omega - W$ 上的 $\Delta^k f$. 事实上, 考虑一般情形 $S * T$. 设 $\text{supp } S = A$ 为紧集, 只须证若在 $\Omega_1 - A$ 中 $T = 0$, 则在 Ω_1 中 $S * T = 0$. 取 $\varphi \in D(\Omega)$, 则 $\text{supp } \varphi(x+y)$ 不与 $\text{supp } S(x)T(y)$ 相交, 因若不然, 即存在一点 (x, y) , $x+y \in \Omega_1$, 且 $x \in A$, $y \notin \Omega_1 - A$. 这是不可能的. 故 $(S * T)(\varphi) = 0$. 这表明 $S * T$ 在 Ω_1 上仅依赖于 $\Omega_1 - A$ 上的 T . 故

$\Delta^k f$ 可换为 g 。由于

$$\Delta^k(hF \star f) = hF \star \Delta^k f = hF \star g,$$

再应用(17), 知 $f \in C^\infty$ 。

2.3.4 分布的Fourier变换

对于任一急降函数 $\varphi \in S$, 其Fourier变换^{*})

$$F[\varphi] = \widehat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) e^{-i x \xi} dx, \quad x \xi = x_1 \xi_1 + \cdots + x_n \xi_n$$

总是存在的。设 $P(\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ 为常系数线性微分算子,

则有(读者可自己验算)

$$P(\partial_\xi) \widehat{\varphi}(\xi) = F[P(-ix)\varphi(x)],$$

$$F[P(\partial_x)\varphi(x)] = P(i\xi)\widehat{\varphi}(\xi).$$

由这些公式可推知 $\widehat{\varphi}(\xi) \in S(R_n)$, 即 $\widehat{\varphi}(\xi)$ 为急降函数。

在经典分析中已得到Fourier变换(以后简称 F 变换)的反转公式为

$$F^{-1}[\widehat{\varphi}] = (2\pi)^{-n} \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{i x \xi} d\xi.$$

直接计算表明: 若 φ 在 S 的有界集中变动, 则 $F[\varphi]$ 及 $F^{-1}[\varphi]$ 也在 S 的有界集中变动。故 F 为由 S 到 S 上的拓扑同构。此外, 在 $L_2(R^n)$ 中有

$$\|F[\varphi]\|^2 = (2\pi)^n \|\varphi\|^2.$$

这是著名的Parseval等式; 一般有

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = (2\pi)^n \langle f, g \rangle,$$

^{*}) 有些书中也采用其它等价形式, 例如 $F[\varphi] = \int \varphi(x) e^{i x \xi} dx$, 等等。

$$\langle f, g \rangle \equiv \int f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (18)$$

其中 $f, g \in L_2(R^n)$. 由此可定义分布 f 的 F 变换 \hat{f} 如下

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D \quad (19)$$

有时为消去因子 $(2\pi)^n$, 也可等价地定义为

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle. \quad (19')$$

定理18 $F: f \rightarrow \hat{f}$ 是 S' 到 S' 上的拓扑同构

这是 F 为 S 上拓扑同构的对偶结果.

对于任一分布 f , 也成立如下公式:

$$P(\partial_x) \hat{f} = F[P(-ix)f]; \quad (20)$$

$$F[P(\partial_x)f] = P(i\xi) \hat{f}. \quad (21)$$

事实上, 由于这些公式对 $\varphi \in D$ 成立, 故有

$$\begin{aligned} \langle P(\partial_x) \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle &= \langle \hat{f}, \overline{P(-\partial_x)} \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^n \langle f, \overline{P(ix)} \varphi \rangle \\ &= (2\pi)^n \langle P(-ix)f, \varphi \rangle = \langle F[P(-ix)f], \hat{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

由 φ 的任意性, 知(20)成立. (21)可类似验证. 上式中 \overline{P} 由 P 对系数取复共轭而得.

容易核验下列诸公式:

$$F[\delta] = 1; \quad F[1] = (2\pi)^n \delta(\xi); \quad (22)$$

$$F[\delta(x-h)] = e^{-i h \xi};$$

$$F[e^{-i h x}] = (2\pi)^n \delta(\xi - h); \quad (23)$$

$$F[P(\partial_x)\delta] = P(i\xi);$$

$$F[P(-ix)\delta] = (2\pi)^n P(\partial_x)\delta(\xi). \quad (24)$$

定理19 $F[D] = Z$, $F^{-1}[Z] = D$, 且 F 及 F^{-1} 为 D 与 Z 间

的拓扑同构, 这里 $Z = \bigcup_{a=1}^{\infty} Z(a)$ (见2.2.1例3).

证 设 $\varphi \in D$, 则 F 变换可延拓为 Fourier-Laplace 变换 (即 ξ 可延拓为复变量 $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbf{C}^n$)

$$\psi(\zeta) = F[\varphi] = \int \varphi(x) e^{-i x \zeta} dx = \int \varphi(x) e^{-i x \xi} e^{x \eta} dx.$$

因 $\text{supp } \varphi$ 含于某闭矩块

$$G(a) \equiv \{x, |x_j| \leq a_j, j = 1, \dots, n\}$$

内, 故有

$$|\zeta^k \psi(\zeta)| = \left| \int_{G(a)} e^{-i x \zeta} \partial^k \varphi(x) dx \right| \leq C_k e^{a|\eta|}. \quad (*)$$

这表明 $\psi(\zeta) \in Z(a)$. F 显然映 $K(a)$ 中有界集为 $Z(a)$ 中有界集, 故为连续映射. 为证 F 映 $K(a)$ 到 $Z(a)$ 上, 对任一 $\psi \in Z(a)$, 定义 $\varphi(x)$ 如下:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (2\pi)^{-n} \int \psi(\xi) e^{i x \xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\xi + i\eta) e^{i x (\xi + i\eta)} d\xi, \end{aligned}$$

积分域的平移是容许的, 因由2.2.1例3式(*), 可对每个 ξ_j 应用 Cauchy 积分定理, 只要取 $k > n$ 即可. 选 $\eta_j = -\delta_j \text{sgn } x_j$ ($j = 1, \dots, n$), 得

$$|\partial^k \varphi(x)| \leq B_k |\xi^k| e^{-\delta|x| + \delta a}.$$

若对某个 j 有 $|x_j| > a_j$, 则当 $\delta_j \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x) \rightarrow 0$. 故有 $\varphi \in K(a)$. 由此知 F 为 $K(a)$ 到 $Z(a)$ 上的双射. 显然 F^{-1} 也是连续的. 定理证毕.

定理20 整函数 $F(\zeta)$ 是台含于球 $S_A = \{x, |x| \leq A\}$ 的分布 $f \in D'$ ($\text{supp } f \subset S_A$) 的 Fourier-Laplace 变换

$$F(\zeta) = \int f(x) e^{-i x \zeta} dx, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

当且仅当：对某常数 C 及 k 有

$$|F(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^k e^{A|\eta|}, \quad (25)$$

$F(\xi)$ 是 $f \in D(S_A)$ 的 Fourier-Laplace 变换，当且仅当：对每个正整数 N ，存在常数 $C_N > 0$ ，使

$$|F(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N} e^{A|\eta|}. \quad (26)$$

证 先证(25)的必要性。由2.3.2定理7知，对紧台分布 f ，存在整数 $k \geq 0$ ，使

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in S_A} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in D(S_A). \quad (27)$$

另一方面，对紧台广函 f 可证

$$\widehat{f}(\xi) = \langle f, e^{ix\xi} \rangle. \quad (28)$$

事实上，取 $\psi \in D(R^n)$ ，使在 S_A 上 $\psi = 1$ ，则有

$$\begin{aligned} \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle &= (2\pi)^n \langle f, \varphi \rangle = (2\pi)^n \langle f, \psi \varphi \rangle \\ &= \langle f(x), \int \widehat{\varphi}(\xi) \psi(x) e^{ix\xi} d\xi \rangle = \int \widehat{\varphi}(\xi) \langle f, \psi e^{ix\xi} \rangle d\xi \\ &= \langle \langle f, e^{ix\xi} \rangle, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in D, \end{aligned}$$

故(28)当 $\xi = \xi$ 时成立；它显然可延拓对 $\xi = \xi + i\eta$ 成立。现在取 $h(x) \in C^\infty(R^1)$ ，使

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right); \\ 0, & x \in (1, \infty), \end{cases}$$

则函数

$$\varphi_\xi(x) = e^{ix\xi} h(|\xi|(|x| - A))$$

属于 D ，且在 S_A 的某邻域中重合于 $e^{ix\xi}$ 。于是由(27)及(28)得

$$|\widehat{f}(\xi)| = |\langle f, e^{ix\xi} \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \max_x |\partial^\alpha \varphi_\xi(x)|. \quad (29)$$

因在 $\text{supp } \varphi_\varepsilon$ 上有 $|x| \leq A + |\xi|^{-1}$, 故结合(29), 即得(25).

(26)的必要性由定理19证明中的式(•)推出.

(26)的充分性也由定理19给出.

为证(25)的充分性, 注意由(25)知 $F \in S'$, 故对某个 $f \in S'$, 有 $F = \widehat{f}$. 设 $\varphi \in D$, 并具性质:

$$\int \varphi(x) dx = 1, \quad \varphi \geq 0, \quad \text{supp } \varphi = \{x; |x| \leq 1\}.$$

这种 φ 当然存在, 例如取 $\varphi = \varphi(x; A, 1, 1)$, 并选 A 使得 $\int \varphi dx = 1$. 记

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (30)$$

则整函数 $\widehat{\varphi_\varepsilon f} = \widehat{\varphi_\varepsilon} F$ 满足形如(26)的估式, 但换 A 为 $A + \varepsilon$. 于是有

$$\text{supp } F^{-1}[\widehat{\varphi_\varepsilon} F] \subset S_{A+\varepsilon},$$

但 $\widehat{\varphi_\varepsilon} F \rightarrow F (\varepsilon \rightarrow 0)$. 事实上, 记 $y = \varepsilon x$, 有

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) &= \int \varphi_\varepsilon(x) e^{-ix\xi} dx = \int \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int \varphi(y) e^{-i\varepsilon y\xi} dy \rightarrow \int \varphi(y) dy = 1 \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

故当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $F^{-1}[\widehat{\varphi_\varepsilon} F] = F^{-1}[F] = f$, 于是得 $\text{supp } f \subset S_A$. 定理证毕.

最后证明关于分布卷积的 F 变换的一个结果.

定理21 设检验空间 Φ 具性质: 若 $\varphi \in \Phi$, 则 $\overline{\varphi}$ 及 $\varphi(-x)$ 都属 Φ ; 且容许连续平移, 即对任何 $h \in R^n$, 算子 $\tau_h: \varphi(x) \rightarrow \varphi(x+h)$ 映 Φ 到 Φ 且当 $|h| \leq 1$ 时关于 h 一致有界. 记 $\Psi = F[\Phi]$.

若 $g \in \mathcal{V}'$ 为函数型广函且为 \mathcal{V} 上乘子, 则 $f = F^{-1}[g]$ 为 Φ 上卷子, 即: 对任一 $\varphi \in \Phi$, $f \cdot \varphi \in \Phi$ 且 $f: \varphi \rightarrow f \cdot \varphi$ 为连续映射; 而对任一广函 $f_1 \in \Phi'$, 总有

$$F[f \cdot f_1] = \widehat{f} \cdot \widehat{f_1}. \quad (31)$$

证 先证 f 为 Φ 上卷子. 对任一 $\varphi \in \Phi$, 记 $\widehat{\varphi} = \psi$, 有

$$F[\tau_h \varphi] = e^{ih\xi} \psi(\xi),$$

因由 $F[\varphi_1] = \psi_1$ 有 $(2\pi)^n \overline{\varphi_1} = F[\overline{\psi_1}]$, $\overline{\varphi_1}$ 为 φ_1 的复共轭, 特别取 $\varphi_1 = \tau_h \varphi$, 由上式得

$$(2\pi)^n \overline{\tau_h \varphi} = F[e^{-ih\xi} \overline{\psi(\xi)}]. \quad (32)$$

结合分布 F 变换定义及(32), 有

$$\begin{aligned} f \cdot \overline{\varphi} &= f(\overline{\tau_x \varphi}) = (2\pi)^{-n} (f, F[e^{-ix\xi} \overline{\psi(\xi)}]) \\ &= (2\pi)^{-n} (g, e^{-ix\xi} \overline{\psi(\xi)}) = (2\pi)^{-n} \int g(\xi) e^{-ix\xi} \overline{\psi(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

即

$$(f \cdot \overline{\varphi})(x) = (2\pi)^{-n} F[g \overline{\psi}](x) = F^{-1}[g \overline{\psi}](-x). \quad (33)$$

因 g 为 \mathcal{V} 上乘子, 故 $g \overline{\psi} \in \mathcal{V}$, 于是(33)的右边属于 Φ . 由(33)还可得 $f \cdot \overline{\varphi}$ 关于 $\overline{\varphi}$ 的连续性. 故 f 为 Φ 上卷子. 利用(33), 容易得到(31)

$$\begin{aligned} (F[f \cdot f_1], \overline{\psi}) &= (f \cdot f_1, F[\overline{\psi}]) = (2\pi)^n (f_1, f \cdot \overline{\varphi}) \\ &= (f_1, F[g \overline{\psi}]) = (Ff_1, g \overline{\psi}) = (g \cdot Ff_1, \overline{\psi}). \end{aligned}$$

注2 2.1—2.3. 的主要参考书是:

A. Friedman, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Chap. 1—4, Prentice Hall New Jersey, 1963.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилков, *Обобщенные Функции*, Выпуск 2, Гл. 1—3, Гос. Изд., Москва, 1958
本章着重于广函理论。关于广函计算及应用, 可参考下列诸书:

J. Arzac, *Fourier Transform and Theory of Distributions*, Prentice Hall, New Jersey, 1966.

H. J. Bremermann, *Distributions, Complex Variables and Fourier Transformation*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1965.

盖尔方特, 希洛夫, 广义函数, I, 科学出版社, 1960.

A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1965.

SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 927—1110, Appl. of Gen. Functions.

2.4 广函的乘法

广函一般不能相乘。但由于技术科学以及理论物理的需要, 近年来出现了各种的广函乘法理论。这里作出初步介绍。

2.4.1 量子场论中的广函乘法

如果说量子力学只用到Dirac测度的乘积, 那末, 在量子场论中就要用到较一般分布的乘积。例如见: T. Ishihara, H. Yamagata, Proc. Japan Acad. 38(1962) 327—332, 333—338, 339—340; S. S. Schweber et al., Mesons and Fields, Acad Press, New York, 1955, Vol. I, Chap. 9, § 1.

这里当然不可能深入量子场论中的乘法问题, 但为了初步

了解这个问题的意义，不妨简单地考察一下因果函数的乘积。

由描述 π 介子运动的相对性波动方程（所谓的 Klein-Gordon 方程）

$$(\square + m^2)u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + m^2 \right) u \\ = \delta(x_0, x_1, x_2, x_3)$$

作 Fourier 变换得

$$(-p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2) \hat{u}(p) = 1, \\ p = (p_0, p_1, p_2, p_3); \\ \hat{u}(p) = \int u(x) e^{-i(x, p)} dx, \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3); \\ (x, p) = x_0 p_0 - x_1 p_1 - x_2 p_2 - x_3 p_3.$$

函数（记 $p^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2$ ）

$$D^C(x) = (2\pi)^{-4} \int \hat{u}(p) e^{i(x, p)} dp = (2\pi)^{-4} \int \frac{e^{i(x, p)}}{m^2 - p^2} dp$$

即称为 Klein-Gordon 方程的因果函数或 Green 函数。

显然， $D^C(x)$ 为发散积分。通常改写为

$$D^C(x) = (2\pi)^{-4} \int e^{i(x, p)} D^C(p) dp,$$

$$D^C(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon};$$

上述极限在广函意义（弱意义）下理解，而检验空间则取为 Schwartz 空间 S 。

在考虑 π 介子的相互作用时，可表为四维时空 $R^4 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ 中由点 $x^{(r)}$ ($r = 1, \dots, n$) 及联结任二点的有向线段¹ 而成的图象 G 。在构造所谓色散矩阵时须作积

$$\prod_{i=1}^L \Delta_i^c(x^{(r)} - x^{(s)}), \quad (1)$$

$$\Delta_i^c(x) = P_i(D) D^c(x), \quad D = \frac{1}{i} \partial.$$

这里 L 为有向线段的总数, $P_i(D)$ 为某些微分多项式. 为了计算广函的乘积 (1), 物理学家采用正规化方法 (例如见: Боголюбов, Ларасюк, Acta Math. 97(1957) 227—266), 而利用关系式

$$\frac{1}{m^2 - p^2 - i\epsilon} = i \int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2 - p^2 - i\epsilon)} d\alpha,$$

于是可改写 $D^c(x)$ 为

$$D^c(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{i}{4^4 \pi^2} \int_0^\infty e^{-i\alpha(m^2 - i\epsilon)} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \quad (2)$$

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

在得到上式时, 曾利用公式

$$\int_0^\infty e^{\pm i(a t^2 + b t)} dt = \frac{1 \pm i}{2\sqrt{2}} \frac{1}{i} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\mp \frac{ib^2}{4a}},$$

算出

$$\int e^{i\alpha p^2 + i(x \cdot p)} dp = \frac{\pi^2}{\alpha^2} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}.$$

由 (2) 知奇性出现于 $\alpha = 0$. 作正规化

$$\begin{aligned} |\overline{\Delta^c(x)}| &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int e^{i(x \cdot p)} dp \{P(p) \\ &\times \int_0^\infty I(\alpha) e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)} d\alpha\} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 P 为 P_i 中的任一个, 而

$$I(\alpha) = 1 + \sum_{j=1}^k c_j e^{-i\alpha(M_j^2 - m^2)},$$

k 待适当选定, c_j 与 M_j 则满足代数方程组

$$\begin{cases} 1 + \sum_{j=1}^k c_j = 0; \\ m^2 + \sum_j c_j M_j^2 = 0; \\ \dots\dots\dots \\ m^{2(k-1)} + \sum_j c_j M_j^{2(k-1)} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

使得 $\alpha = 0$ 为 $I(\alpha)$ 的 k 重零点, 以保证 $|\Delta^c(x)|$ 存在. 为证明 $|\overline{\Delta^c(x)}|$ 在 S' 中弱收敛于 $\Delta^c(x)$, 取定 μ_j , 使

$$\Delta(\mu) \equiv \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots\dots 1 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots\dots\dots \mu_k^2 \\ \dots\dots\dots \\ \mu_1^{2(k-1)} & \mu_2^{2(k-1)} & \dots\dots\dots \mu_k^{2(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

于是线性方程组

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k a_j^{(v)} = \delta_{0,v}; \\ \dots\dots\dots \\ \sum_j a_j^{(v)} \mu_j^{2(k-1)} = \delta_{k-1,v} \end{cases} \quad v = 0, 1, \dots, k-1 \quad (5)$$

有唯一的非零解 $(a_1^{(v)}, \dots, a_k^{(v)})$, $v = 0, 1, \dots, k-1$. 令 $M_j = M \mu_j$, $j = 1, \dots, k$, 由 (4) 和 (5) 可得:

$$c_j = - \sum_{v=0}^{k-1} a_j^{(v)} \left(\frac{m}{M} \right)^{2v}, \quad j = 1, \dots, k,$$

故当 $M \rightarrow \infty$ 时, $|c_j| \leq C$, C 为某个常数. 于是对任一个 $\varphi \in S$,

可估计差

$$\int \left[\overline{|\Delta^c(x)|} - \Delta^c(x) \right] \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^k c_j \int \Delta_{M_j}^c(x) \varphi(x) dx,$$

$$\Delta_{M_j}^c(x) = e^{-i\alpha(M_j^2 - m^2)},$$

但由Parseval等式及Lebesgue引理知当 $M \rightarrow \infty$ 时有,

$$\int \Delta_{M_j}^c(x) \varphi(x) dx = \int P(p) \widehat{\varphi}(p) dp \frac{i}{(2\pi)^4}$$

$$\times \int e^{-i\alpha(M_j^2 - m^2) + i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} dx \rightarrow 0.$$

因 c_j 都有界, 故当 $M \rightarrow \infty$ 时, $\overline{|\Delta^c(x)|}$ 在 S' 中收敛于 $\Delta^c(x)$,

定理1 对积(1)的每个因子按(3)作正规化, 则当 $M \rightarrow \infty$ 时, $\prod_{i=1}^L \overline{|\Delta_i^c(x^{(i)} - x^{(i)})|}$ 在 S' 中有弱极限存在, 而可作为积(1)的定义.

证 只须对 $L=2$ 讨论. 因 S 为 F 空间, 故 S' 为弱完备的(见2.1.1定理5). 所以只须证明: 对任一 $\varphi \in S$, 数列 $\langle \prod_{i=1}^2 \overline{|\Delta_i^c(x)|}, \varphi(x) \rangle$ 收敛. 但由于 S 为 FM 空间, 而为可分空间(见2.1.2定理11). 今证 S' 为 M 空间. 对 S' 中任一有界列 $\{f_j\}$, 在 S 的可列稠集 $\{\varphi_j\}$ 上, 用对角线方法可得收敛子列 $\{\langle f_j, \varphi \rangle\}$, 这里 φ 为列 $\{\varphi_j\}$ 中任一元. 事实上, 由 $|\langle f_j, \varphi_1 \rangle| \leq C_1$ 及实或复数域上有界集的相对紧性, 知有子列 $\langle f_{j_1}, \varphi_1 \rangle$, $\langle f_{j_2}, \varphi_1 \rangle, \dots$ 为收敛列; 同样, 由于 $|\langle f_{j_1}, \varphi_2 \rangle| \leq C_2$, 可得收敛子列 $\{\langle f_{j_2}, \varphi_2 \rangle\}$; 如此构造下去, 即得列 $\{f_{j_j}\}$, 不妨仍记为 $\{f_j\}$, 对 $\{\varphi_j\}$ 中每个元 φ_v , 使 $\{\langle f_j, \varphi_v \rangle\}$ 当 $j \rightarrow \infty$ 时收敛. 但 $\{\varphi_v\}$ 为 S 中稠集, 故也在每个 S_i 中稠, 这里 S_i 是 S 依范 $\|\varphi\|_i$

的完备化。另一方面，因 $\{\langle f_j, \varphi \rangle\}$ 有界，据2.1.1定理4及定理3，乃按某范 $\|f\|_1$ 有界。今证 $\{f_j\}$ 对每个 $\varphi \in S_1$ 收敛。不妨只就收敛于零来讨论。因 $\{\varphi_j\}$ 在 S_1 中稠，对任一 $\varphi \in S_1$ 及 $\varepsilon > 0$ ，有 $\{\varphi_{j_0}(\varepsilon)\}$ ，使

$$\|\varphi - \varphi_{j_0}(\varepsilon)\|_1 < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

这里 N 是 $\{f_j\}$ 在 S'_1 中按范 $\|f\|_1$ 的界

$$\|f_j\|_1 \equiv \sup_{\|\varphi\|_1=1} |\langle f_j, \varphi \rangle| \leq N.$$

取 j_0 充分大，使 $|\langle f_j, \varphi_{j_0}(\varepsilon) \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$ ， $\forall j \geq j_0$ 。于是有

$$\begin{aligned} |\langle f_j, \varphi \rangle| &= |\langle f_j, \varphi_{j_0}(\varepsilon) \rangle + \langle f_j, \varphi - \varphi_{j_0}(\varepsilon) \rangle| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + N \frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $\{f_j\}$ 确对每个 $\varphi \in S_1$ 收敛。由 S'_1 及 S' 的完备性知极限 $f \in S'_1 \subset S'$ ，即 S' 为 M 空间。

因此，为证列 $\{\langle \prod_{j=1}^2 \overline{\Delta_j^c(x)}, \varphi(x) \rangle\}$ 收敛，只须证这个列对 M 一致有界，这里 $M = \frac{M_j}{\mu_j}$ 。但这是显然的，因由

$$\begin{aligned} \langle \prod_{j=1}^2 \overline{\Delta_j^c(x)}, \varphi(x) \rangle &= \frac{i^2}{(2\pi)^4} \int P_1(p) P_2(p) \widehat{\varphi}(p) dp \\ &\times \int I_1(\alpha) I_2(\alpha) e^{i\alpha(p^2 - m^2 + i\varepsilon)} d\alpha \end{aligned}$$

据 $\widehat{\varphi}(p)$ 的急降性及Lebesgue引理，知上式对 S 的有界集中的 φ 关于 M 为一致有界的。定理证明完毕。

注1 关于因果函数的乘积问题，近来仍有讨论，例如见：

G. Brauns R. Liese, J. D. E., 16(1974) 399—412, 25(1977) 145—147; J. K. Thurber, J. Katz, Lecture Notes in Math. V. 369, 1974, 272—302.

诚然, 定理 1 给出了某些广函的乘积, 但只限于因果函数型的广函。所以下面还要作一些较一般的讨论。

2.4.2 结合性乘法的不存在性

在讨论一般广函的乘法问题之前, 有注意到一个否定的结果 (L. Schwartz, C. R. Paris, 239 (1954) 847—848), 即: D' 上不存在具结合性的乘法运算。为了严格证明这个结论, 先证明几个引理。

引理 1 设 E 为定义于实轴的广函空间, 而包含连续函数空间 E_0 , 则 E 上不存在乘法运算, 使下列性质同时成立: 1) 结合性; 2) 在 E_0 上归为通常乘法; 3) E 中有单元 1; 4) 有元 x^{-1} 及 $\delta \neq 0$, 使 $x^{-1}x = 1$, $x\delta = 0$ 。

证 若具上述四个性质的乘法运算存在, 必引致矛盾如下:

$$0 = x^{-1}(x\delta) = (x^{-1}x)\delta = \delta \neq 0.$$

引理 2 记 $E_1 = C^2(R^1)$, 并设 $E_1 \subset E$. 若 E 定义有乘法运算而具性质: 1) 有单元 1; 2) 在 E_0 上归为通常乘法; 此外, 若在 E 上还定义有微分运算面具性质: a) 在 E_1 上归为通常微分运算; b) $(fg)' = f'g + fg'$, 则当记 $f = x(\ln|x| - 1)$ 时, 有

$$f''x = xf'' = 1 \quad \text{即} \quad f'' = x^{-1}.$$

证 容易计算

$$f''x = (fx)'' - 2f'x' - fx'' = (fx)'' - 2f',$$

但 $(fx)' = 2f + x$, $(fx)'' = 2f' + 1$, 故确有 $f''x = 1$; 类似可证

$$xf'' = 1.$$

引理3 若 $E \supset E_0$, 且 E 上有乘法运算及微分运算, 具引理 1 及 2 所述性质, 则 E 中不存在元 $\delta \neq 0$, 使 $x\delta = 0$.

证 若不然而有 $\delta \neq 0$, 使 $x\delta = 0$, 则取 $x^{-1} = f''$, f 如引理 2 中所述, 由引理 1 及 2 即得矛盾.

定理2 在分布空间 D' 上不存在具结合性的乘法运算.

证 显然有 $D' \supset E_0$, 且 D' 上微分运算具备引理 2 所述性质, 同时引理 1 中性质 2) — 3) 是必然的. 此外, 据引理 2 知对 x 有逆元 $x^{-1} = f''$ 存在. 若 D' 上存在具结合性的乘法运算, 则因 D' 中含元 $\delta = \frac{d^2}{dx^2} |x| \neq 0$, 且使 $x\delta = 0$:

$$\begin{aligned} x \left(\frac{d^2}{dx^2} |x| \right) &= (x|x|)'' - 2 \frac{d}{dx} |x| \\ &= 2 \frac{d}{dx} |x| - 2 \frac{d}{dx} |x| = 0, \end{aligned}$$

故由引理 1 知引出矛盾.

尽管定理 2 否定了 D' 上结合性乘法运算的存在性, 但对于特殊类型的广函乘法及非结合性乘法或其它类型乘法运算, 并非是完全不可能的. 正如 König 在 Math. Ann. 128(1955) 420—452 中所说, 可建立多种的广函乘法体系. 问题在于是否符合物理实际.

现在附带讨论有限阶分布与适当光滑函数的乘积问题. 为简单计, 仅以一维情形为例.

设定义于有限间隔 $[a, b]$ 的分布 f_1 为通常的 m 次连续可微函数 (也可称 f_1 为 $-m$ 阶分布), 记 $F_1 = f_1^{(m)}$. 若 f_2 为 m 阶分布, 即 $f_2 = F_2^{(m)}$, 这里 $F_2(x)$ 为定义于 $[a, b]$ 的连续函数, 则积 $f_1 f_2$ 可如下定义:

$$f_1 f_2 = f_1 F_2^{(m)} = (f_1 F_2)^{(m)} - m(f_1' F_2)^{(m-1)} + \dots \\ + (-1)^k \binom{m}{k} (f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)} + \dots + (-1)^m f_1^{(m)} F_2. \quad (6)$$

事实上，上式右边每一项都是 $[a, b]$ 上的分布，故其代数和亦然。例如，分布 $(f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)}$ 如下作用：

$$\langle (f_1^{(k)} F_2)^{(m-k)}, \varphi \rangle = (-1)^{m-k} \langle f_1^{(k)} F_2, \varphi^{(m-k)} \rangle, \\ \forall \varphi \in D([a, b]),$$

由于 $f_1^{(k)} F_2$ 为连续函数，上式右边有意义。

在开域 I 或无限域 I 的情形，可对 I 中任一间隔 $[a, b]$ ，用 $f_{[a, b]}$ 记分布 $f \in D'(I)$ 在 $[a, b]$ 上的缩射，即：对任一 $\varphi \in D([a, b])$ ，使 $\langle f, \varphi \rangle = \langle f_{[a, b]}, \varphi \rangle$ 。若对 $D'(I)$ 中任二分布 f_1 及 f_2 ，它们在任意间隔 $[a, b] \subset I$ 上的缩射 $f_{1[a, b]}$ 及 $f_{2[a, b]}$ 的积有定义，则称 $f_1 f_2$ 在 I 上有定义。

容易核验，定义式(6)当 $f_1 \in \mathcal{D}$ 时等价于2.2.3定义5，

$$(f_1 f_2, \varphi) = (f_2, f_1 \varphi) \\ = (-1)^m \int_a^b F_2(x) [f_1(x) \varphi(x)]^{(m)} dx.$$

由于不必限定 f_1 为乘子，定义式(6)当然更广泛些。由(6)也不难推出公式

$$(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$$

且上式左、右边的三个乘积，当右边二积之一有定义时，都有意义。特别当 $h(x) \in C^m$ 时，可得结果：

$$h(x) \delta(x) = h(0) \delta(x); \\ h(x) \delta^{(m)}(x) = h(0) \delta^{(m)}(x) - m h'(0) \delta^{(m-1)}(x) \\ + \dots + (-1)^m h^{(m)}(0) \delta(x). \quad (6')$$

关于有限阶广函的乘积，有较多讨论，见

König, H., Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math. No. 82 (1957), 80S.

Itano, M., Hirosh Math. J. 6(1976)365—375.

Fisher, B., Math. Ann. 203(1973) 103—116; Math. Nachr. 108(1982)117—127.

Guttinger, W., SIAM J. Appl. Math., 15 (1967)929—943.

Bredimas, A., Lett. Nuovo Cim. 13:16 (1975) 601 - 604.

K. Keller, Rep. Math. Phys. 14:3(1978)285—305.

Kaminski, A., Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. 25:4(1977)369—379.

2.4.3 复变函数方法

近年来出现的各种乘法理论，各依据不同的处理途径。这里先介绍复变函数方法。为简单起见，仍以一维情形为例。

先作一些预备性的讨论。

定理3 若 $f \in \mathcal{E}'$ ，即 f 具紧台，则函数

$$f^0(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(f, \frac{1}{x-z} \right) \quad (7)$$

有定义，且在 $z = x + iy$ 平面上除 f 的台 $[a, b]$ 外，为 z 的解析函数；当 $z \rightarrow \infty$ 时， $f^0(z) \rightarrow 0$ 。

注2 $f^0(z)$ 称为分布 f 的 Cauchy 积分。定理 3 的逆不成立。例如函数 $e^{\frac{1}{z}} - 1$ ，除 $z = 0$ 外，为解析的，当 $z \rightarrow \infty$ 时，它也趋于零，但不存在分布 $f \in \mathcal{E}'$ ，使 $f^0(z) = e^{\frac{1}{z}} - 1$ 。事实上，若有 $f \in \mathcal{E}'$ 具所述性质，则有

$$f = \sum_{j=1}^N a_j \delta^{(j)}(x),$$

于是

$$f^0(z) = \sum_{j=1}^N a_j z^{-j},$$

而以 $z=0$ 为有限重极点, 例如 $e^{\frac{1}{z}} - 1$ 以 $z=0$ 为本性奇点.

证 当 $\text{Im} z = y \neq 0$ 时, $\frac{1}{x-z} \in \mathcal{E}$, 故 $\left(f, \frac{1}{x-z}\right)$ 对所有使 $y \neq 0$ 的 z 有定义, 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} f^0(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^0(z+h) - f^0(z)}{h} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{h \rightarrow 0} \left(f, \frac{1}{(x-z-h)(x-z)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left(f, \frac{1}{(x-z)^2} \right) \end{aligned}$$

也存在, 故 $f^0(z)$ 当 $\text{Im} z \neq 0$ 时为 z 的解析函数. 显然, $\left(f, \frac{1}{x-z}\right)$ 当 $z=x$ 但不属 $\text{supp} f = [a, b]$ 时仍有意义. 故 $f^0(z)$ 在 $[a, b]$ 外为 z 的解析函数. 当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x-z}$ 及其各阶导数对所有的 $x \in [a, b]$ 一致趋于零, 即 $\frac{1}{x-z}$ 当 $z \rightarrow \infty$ 时在 \mathcal{E} 中趋于零. 故 $f^0(z)$ 作为 \mathcal{E} 上连续线性泛函也当 $z \rightarrow \infty$ 时趋于零.

推论1 记 $f^{(*)^0}(z)$ 为 f 的弱导数 $f^{(*)}$ 的 Cauchy 积分, 则有

$$\begin{aligned} f^{(n)'}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(f^{(n)}, \frac{1}{x-z} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \left(f, \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{1}{x-z} \right) = \frac{\partial^n}{\partial z^n} f^0(z) \end{aligned}$$

定理4 若 $f \in \mathcal{S}'$, 则对任一个 $\varphi \in D$, 有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} [f^0(x+i\varepsilon) - f^0(x-i\varepsilon)] \varphi(x) dx = (f, \varphi). \quad (8)$$

证 记(7)左边的积分为 $I(\varepsilon)$, 它显然存在:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(\xi), \frac{1}{\xi-x-i\varepsilon} - \frac{1}{\xi-x+i\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int \left(f, \frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2} \right) \varphi(x) dx \\ &= (f, \varphi^0(\xi+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon)). \end{aligned}$$

这里 $\varphi^0(z)$ 为 $\varphi(x)$ 的 Cauchy 积分. 上式中积分顺序的交换是合法的, 因 f 及 φ 都具紧台. 今证

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\partial^n}{\partial z^n} [\varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon)] &= \varphi^{(n)}(x), \\ n &= 0, 1, \dots \quad (9) \end{aligned}$$

事实上, 对任意 $\delta > 0$, 可改写

$$\begin{aligned} \varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{x+\delta}^{\infty} \right\} \varphi(\xi) \frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2} d\xi, \end{aligned}$$

记 $\text{supp } \varphi$ 的长度为 L . 因 $|\varphi(x)| \leq M$, 沿 $(-\infty, x-\delta)$ 及 $(x+\delta, \infty)$ 的积分的绝对值之和不超过 $2M L\varepsilon/\delta^2$. 不妨设 $\varphi(x)$ 取实值(取复值时, 对实、虚部分别估计), 有

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(\xi) \frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2} d\xi = \varphi(\xi_0) \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{2i\varepsilon d\xi}{|\xi-x+i\varepsilon|^2} \\ = \varphi(\xi_0) \int_{\Gamma} \frac{1}{z-x} dz.$$

这里 ξ_0 为 $(x-\delta, x+\delta)$ 中某点, 而 Γ 则由联结点 $x-\delta-i\varepsilon$ 与 $x+\delta-i\varepsilon$ 的有向线段及联结点 $x+\delta+i\varepsilon$ 与 $x-\delta+i\varepsilon$ 的有向线段组成. 为了使 Γ 成为闭路 Γ_1 , 可加上沿从 $x-\delta+i\varepsilon$ 到 $x-\delta-i\varepsilon$ 及从 $x+\delta-i\varepsilon$ 到 $x+\delta+i\varepsilon$ 的相应积分. 这两项积分绝对值的和不超过 $\frac{4\varepsilon}{\delta}$. 但

$$\oint_{\Gamma_1} \frac{dz}{x-z} = 2\pi i,$$

故得

$$\left| \varphi(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \varphi(\xi) \frac{2i\varepsilon}{|\xi-x+i\varepsilon|^2} d\xi \right| \\ < |\varphi(x) - \varphi(\xi_0)| + \frac{2M}{\pi} \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

记 $\varphi(x)$ 在长为 2δ 的区间上的最大变差为 $m(\delta)$. 因 $\varphi \in D$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} m(\delta) = 0$. 据 $m(\delta)$ 的定义知 $|\varphi(x) - \varphi(\xi_0)| \leq m(\delta)$. 结合所得诸估计式, 有

$$|\varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon) - \varphi(x)| \\ < \frac{2ML\varepsilon}{\pi\delta^2} + m(\delta) + \frac{4M\varepsilon}{\pi\delta}.$$

取 $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, 上式右边当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时趋于零. 因所有估式不依赖 x , 故 $\varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon)$ 一致趋于 $\varphi(x)$. 类似可证 (9) 一般成立. 限于 $\text{supp} f$ 上, 由 (9) 知 $\varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon)$ 依 D 中

拓扑收敛于 $\varphi(x)$ 。故(8)成立。

定理5 设 $f \in \mathcal{E}'$ ，则对顺时针方向绕 $\text{supp} f$ 的任一简单闭曲线 C_0 ，有

$$(f, 1) = \oint_{C_0} f^0(z) dz. \quad (10)$$

证 记 $\text{supp} f = I$ 。不妨设 I 为一个间隔（有限个间隔情形可类似讨论）。对 I 的任一子域 (a, b) ，有

$$\begin{aligned} (f, 1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b [f^0(x + i\varepsilon) - f^0(x - i\varepsilon)] dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{C(\varepsilon)} f^0(z) dz. \end{aligned}$$

这里取 $\varphi \in D$ ，在 (a, b) 上 $\varphi = 1$ ； $C(\varepsilon)$ 则由从点 $a + i\varepsilon$ 到 $b + i\varepsilon$ 及从点 $b - i\varepsilon$ 到 $a - i\varepsilon$ 的有向线段组成，加上沿从 $a - i\varepsilon$ 到 $a + i\varepsilon$ 及从 $b + i\varepsilon$ 到 $b - i\varepsilon$ 的相应积分，得沿闭路 C^* 的积分。由于 $f^0(z)$ 的解析性，它在有界域上是有界的。对给定的 $\frac{\delta}{2}$ ，取 $\varepsilon > 0$ 充分小，可使所加积分的绝对值小于 $\frac{\delta}{2}$ 。结合上面的极限式，得

$$|(f, 1) - \oint_{C^*(\varepsilon)} f^0(z) dz| < \delta.$$

因 $f^0(z)$ 在 I 外为解析函数，故对定理所述的任一闭路 C_0 ，有

$$\oint_{C_0} f^0(z) dz = \oint_{C^*(\varepsilon)} f^0(z) dz,$$

于是得

$$|(f, 1) - \oint_{C_0} f^0(z) dz| < \delta,$$

且估式与 ε 无关。由于 δ 的任意性，知(10)成立。

注3 (10)式左、右边的1分别换为 $\varphi(x)$ 及 $\varphi^0(z)$ 时一般不相等。事实上,

$$\begin{aligned}(f, \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} [f^0(x+i\varepsilon) - f^0(x-i\varepsilon)] \\ &\quad \times [\varphi^0(x+i\varepsilon) - \varphi^0(x-i\varepsilon)] dx, \\ \oint_{C_0} f^0(z) \varphi^0(z) dz &= \int_{-\infty}^{\infty} [f^0(x+i\varepsilon) \varphi^0(x+i\varepsilon) \\ &\quad - f^0(x-i\varepsilon) \varphi^0(x-i\varepsilon)] dx,\end{aligned}$$

它们一般是不同的。

自然会想到是否可换 $\varphi^0(z)$ 为 $\varphi(z)$ 。这引出如下的考虑。

定义1 以 \mathscr{A} 记整函数空间, $\mathscr{A}_b (0 < b \leq \infty)$ 记带域 $S_b = \{z: |\operatorname{Im} z| < b\}$ 中的解析函数空间; 显然有

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_\infty; \quad \mathscr{A} \subset \mathscr{A}_b \subset \mathscr{E}$$

并赋以由 \mathscr{E} 引出的导拓扑; 在后一包含关系中, 乃对实变量函数而论。

定义2 以 C_0 记顺时针方向绕给定紧台分布的台的任一简单闭曲线; 以 C_\pm 记实轴上、下依正向进行而与实轴平行的二有向直线; 以 C_\pm 记在实轴上、下各依正、负向进行而与实轴平行的二直线。

定理6 设 $f \in \mathscr{E}'$, $\varphi \in \mathscr{A}_b$, 则对任何 $C_0 \subset S_b$, 有:

$$(f, \varphi) = \oint_{C_0} f^0(z) \varphi(z) dz. \quad (11)$$

若 $f^{(n)} = O\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $n = 0, 1, \dots$, $\varphi \in O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, 则对任何 $C_\pm \subset S_b$, 有

$$(f, \varphi) = \int_{C_\pm} f^0(z) \varphi(z) dz, \quad (12)$$

证明完全类似于定理 5 的证明, 故略去。

下面进入紧台分布乘法运算的讨论。

乘法定义1 设 $f, g \in \mathcal{E}'$, 定义积 $f \textcircled{1} g$ 如下:

$$(f \textcircled{1} g, \varphi) = \oint_{C_0} f^0(z) g^0(z) \varphi(z) dz,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{A}_b, C_0 \subset S_b.$$

这里 C_0 含 $\text{supp} f$ 及 $\text{supp} g$ 的并于所围域内。

不难核验, $f \textcircled{1} g$ 确作成 \mathcal{A}_b 上连续线性泛函; 且乘法为交换的及结合的; 由于 $f=1$ 及 $g=x$ 都无相应 Cauchy 积分存在, 故这种乘法运算的存在并不与定理 2 矛盾。

乘法定义2 若 $f \in D'$ 且 $f^0(z)$ 存在, 记

$$f^1(z) = \begin{cases} f^0(z), & \text{Im} z > 0, \\ -f^0(z), & \text{Im} z < 0, \end{cases}$$

而称为 f 的解析延拓, 因

$$(f, \varphi) = \int_{C_0} f^0(z) \varphi(z) dz = \int_{C_p} f^1(z) \varphi(z) dz,$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{A}_b.$$

可定义积 $f \textcircled{2} g$ 如下(当然要求 $g^0(z)$ 存在):

$$(f \textcircled{2} g, \varphi) = \int_{C_p} f^1(z) g^1(z) \varphi(z) dz$$

若 f 或 g 具紧台, 且 $\varphi(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, 上面的积分存在, 而

确定 $f \textcircled{2} g$ 为

$$\mathcal{A}_b^1 = \left\{ \varphi: \varphi = O\left(\frac{1}{|z|}\right), \varphi \in \mathcal{A}_b \right\}$$

上广函, 可核验这种乘法运算也有交换性及结合性; 同样不与

定理 2 相矛盾.

定理 7 设 $f, g \in \mathcal{S}'$, 则

$$(f \textcircled{1} g, 1) = 0, \quad (f \textcircled{2} g, 1) = 0.$$

证 因 $f^0(z)$ 及 $g^0(z)$ 分别在 $\text{supp } f$ 及 $\text{supp } g$ 外为解析函数, 且当 $z \rightarrow \infty$ 时都趋于零, 故积

$$f^0(z)g^0(z) = f^1(z)g^1(z).$$

当 $z \rightarrow \infty$ 时至少具阶 $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$, 于是

$$\oint_{C_0} f^0(z)g^0(z)dz = 0 \quad (C_0 \rightarrow \infty),$$

即 $(f \textcircled{1} g, 1) = 0$. 对于 $\int_{C_p} f^1(z)g^1(z)dz$, 因被积函数当 $z \rightarrow$

∞ 时至少具阶 $O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$. 使 C_p 的二平行直线无限远离 (这时

$b = \infty$), 所论积分也趋于零, 故 $(f \textcircled{2} g, 1) = 0$.

由这个定理知上述两种乘法运算在连续函数情形并不归为通常的乘法运算.

乘法定义 3 设 $f, g \in D'$, 使 $f^0(z)$, $g^0(z)$ 存在, 定义

$$(f \textcircled{3} g, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} [f^0(x+i\varepsilon) - f^0(x-i\varepsilon)]$$

$$\times [g^0(x+i\varepsilon) - g^0(x-i\varepsilon)] \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in D$$

显然, 当 f 及 g 为连续函数且 $f^0(z)$ 及 $g^0(z)$ 存在时, 上述乘法归为通常乘法; 但 1 无 Cauchy 积分存在. 对一般分布, 上述乘积可能失去意义.

例 1 考察 $\delta \textcircled{3} \delta$. 据定义有 $\left(\delta^0(z) = \left(\delta, \frac{1}{x-z}\right) = -\frac{1}{z}\right)$;

$$\begin{aligned}
(\delta \circledast \delta, \varphi) &= -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right)^2 \varphi(x) dx \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \lim \int \left\{ \frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} + \frac{1}{(x-i\varepsilon)^2} + \frac{1}{i\varepsilon} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \right\} \varphi(x) dx \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \int 2 \text{v.p.} \left(\frac{1}{x^2} \right) \varphi(x) dx - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \{(\delta, \varphi) + o(\varepsilon)\}.
\end{aligned}$$

这里 $\text{v.p.} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ 表示 $\frac{1}{x^2}$ 的主值 (或正规化), 故上式右边第一项为有限值, 而第二项的极限不存在, 故 $\delta \circledast \delta$ 无定义.

例2
$$\delta \circledast \text{v.p.} \frac{1}{x} = \frac{-1}{2} \delta'(x). \quad (13)$$

事实上, 因 $\text{v.p.} \frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} \right)$, 有

$$\begin{aligned}
\left(\delta \circledast \text{v.p.} \frac{1}{x}, \varphi \right) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{-1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} - \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{x+i\varepsilon} + \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \varphi(x) dx \\
&= \frac{-1}{4\pi i} \lim \int \left[\frac{1}{(x+i\varepsilon)^2} - \frac{1}{(x-i\varepsilon)^2} \right] \varphi(x) dx \\
&= \frac{-1}{2} \int \delta'(x) \varphi(x) dx.
\end{aligned}$$

这里用到关系式

$$\delta'^0(z) = \left(\delta', \frac{1}{x-z} \right) = \left(\delta, \frac{1}{(x-z)^2} \right) = \frac{1}{z^2}.$$

这个例给出量子力学中用到的结果。

本段所论也可用于较一般情形；在例 1 中可尝试取 Hadamard 意义下的发散积分的有限部分而定义

$$|\bar{\delta} \textcircled{3} \bar{\delta} = \frac{-1}{2\pi^2} \cdot \text{v. p.} \left(\frac{1}{x^2} \right),$$

但这个结果不是量子力学所需要的。

关于复变函数方法的详细讨论，可见

H. Bremermann, L. Durand, J. Math. Phys. 2(1961) 240—258;

M. Itano, J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A1, 30(1966) 151—181;

A. Bredimas, J. Math. Pure et Appl. (9) 56(1977) 479—491;

C. L. Sabharwal, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970) 503—510;

A. Sloan, Pacif. J. Math. 79(1978)207—224.

2.4.4 正规列方法

现在介绍 Mikusinski (Studia Math 20(1961) 163—169) 用正规列处理广函积问题的方法^{*)}。这个方法有相当的概括性与实用性。

先作预备性讨论。

定义3 若在任一矩块 $G(a, b) \equiv \{x: a_j \leq x_j \leq b_j, j = 1, \dots, n\}$ 上，对给定的函数列 $\{\varphi_\nu\} \subset \mathcal{E}$ ，存在正整数 k 及列 $\{\Phi_\nu\} \subset \mathcal{E}$ ，使 $\varphi_\nu = \Phi_\nu^{(k)}$ ，且列 $\{\Phi_\nu\}$ 在 G 上一致收敛，则称列 $\{\varphi_\nu\}$ 为基础列。二基础列 $\{\varphi_\nu\}$ 及 $\{\psi_\nu\}$ 若使列 $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots$

^{*)} 也可见 H. F. Walter. Math. Ann. 189(1970) 211—221.

仍为基础列，即称为等价列。

注意列 $\{\varphi_\nu\}$ 在 R^n 上不一定一致收敛，因而列 $\{\varphi_\nu = \Phi_\nu^{(k)}\}$ 更不必在 R^n 上一致收敛，故 $\{\varphi_\nu\}$ 不必收敛于连续函数。今证明。 R^n 上所有等价基础列确定有限阶分布。为此只须证每个等价基础列对应于某连续函数的有限阶弱导数。

记等价基础列 $\{f_\nu(x)\}$ 所定义的元素为 $f \equiv [f_\nu]$ 。由于在任一矩块上总存在 $\{f_\nu\}$ 的等价多项式列 $\{P_\nu(x)\}$ ，可如下定义 f 的 m 阶导数： $f^{(m)} = [P_\nu^{(m)}(x)]$ 。事实上：1) $\{P_\nu^{(m)}\}$ 确为基础列。因由 $P_\nu = F_\nu^{(k)}(x)$ 有 $P_\nu^{(m)} = F_\nu^{(m+k)}$ ，且 $\{F_\nu\}$ 在任一矩块上一致收敛；2) 若 $\{f_j\}$ 及 $\{g_j\}$ 为等价基础列，且 $\{f_j^{(m)}\}$ 及 $\{g_j^{(m)}\}$ 也是基础列，则这两个列也必等价。因由 $f_\nu = F_\nu^{(k)}$ 及 $g_\nu = G_\nu^{(k)}$ 有 $f_\nu^{(m)} = F_\nu^{(k+m)}$ 及 $g_\nu^{(m)} = G_\nu^{(k+m)}$ ，且 $\{F_\nu\}$ 与 $\{G_\nu\}$ 为等价的。因此，象前面那样地定义 f 的导数，是有意义的。

由导数的上述定义特别可推知：若 $\{f_\nu^{(m)}\}$ 为基础列，则有

$$f^{(m)} = [f_\nu(x)]^{(m)} = [f_\nu^{(m)}(x)].$$

事实上，若 $f_\nu(x) = P_\nu(x)$ ，则 $[f_\nu^{(m)}(x)] = [P_\nu^{(m)}(x)] = f^{(m)}$ 。

据上所论，对给定的元素 $f = [f_\nu(x)]$ ， $f_\nu(x) = F_\nu^{(k)}(x)$ ，这里 $\{F_\nu\}$ 在任一矩块上一致收敛于 $F(x)$ ； $F(x) = [F_\nu(x)]$ ，应有

$$\begin{aligned} f &= [f_\nu(x)] = [F_\nu^{(k)}(x)] = [F_\nu(x)]^{(k)} \\ &= F^{(k)}(x) \end{aligned}$$

故 f 确为在任一矩块上连续的函数 $F(x)$ 的有限阶导数，而据2.2.2式(7)及2.2.3定义6知 f 为有限阶分布。

定义4 若由 $\mathcal{E} \times \cdots \times \mathcal{E}$ 到 \mathcal{E} 的算子 $R(\varphi, \cdots, \psi)$ 具性质：当 $\{\varphi_\nu\}, \cdots, \{\psi_\nu\}$ 为基础列时， $\{R(\varphi_\nu, \cdots, \psi_\nu)\}$ 也是基础列，

即称 R 为正规算子。

可核验，下列算子都是正规的：

1. 加、减运算 $\varphi(x) \pm \psi(x)$;
2. 以数 c 相乘 $c\varphi(x)$;
3. 以固定函数 $\omega(x) \in \mathcal{S}$ 相乘 $\omega(x)\varphi(x)$;
4. 以固定函数 $\omega(x) \in D$ 作卷积 $\omega * \varphi$;
5. 不定积分 $\int_x^{\infty} \varphi(t) dt$.

据定义 4，由基础列的等价类

$$R(f, \dots, g) = [R(f_v, \dots, g_v)]$$

可延拓正规算子的作用于分布 $f = [f_v], \dots, g = [g_v]$.

定义 5 不是正规算子的算子，称为非正规算子。

重要的非正规算子有如下几种：

6. 乘法 $\varphi(x)\psi(x)$;
7. 合成 $\varphi(\psi(x))$;
8. 卷积 $\varphi(x) * \psi(x)$;
9. 定积分 $\int_G \varphi(x) dx$;
10. Fourier 变换 $\int \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$.

读者应注意 3 与 6 的区别、4 与 8 的区别在于 ω 的特殊性，也应注意 5 与 9 的区别。

为了延拓非正规算子于分布，引进正规列。

定义 6 具下述性质的基础列称正规列：

- 1) 正规列的每个子列仍为正规列；
- 2) 若 $\{\varphi_v\}$ 及 $\{\psi_v\}$ 为等价正规列（即定义同一分布），则 $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \dots$ 也是正规列，并确定同一分布；
- 3) 若某分布在某矩块上为连续函数，则确定它的每一正

规列在此矩块的任一个子矩块上一致收敛；

4) 若某分布 f 在某矩块上为局部 L 可积函数，则其相应的每一正规列 $\{f_\nu(x)\}$ 在此矩块上为 L 收敛的，即： $\{f_\nu(x)\}$ 在此矩块上殆遍收敛，且在此矩块的每个子矩块 G 上， $\int_G f_\nu(x) dx$ 关于 G 一致收敛。

注意定义 6 中的要求 1) 及 2) 在于保证延拓

$$R(f, \dots, g) \rightarrow [R(f_\nu, \dots, g_\nu)]$$

的唯一性，其中 $f = [f_\nu(x)]$, \dots , $g = [g_\nu(x)]$ 为分布；而要求 3) 及 4) 则分别保证算子 R 的连续性及其可积性。

可核验，在前面所列十种运算中，1—7 及 9 (当 G 为紧集) 保持连续性，即：若列 $\{\varphi_\nu\}, \dots, \{\psi_\nu\} \subset \mathcal{E}$ 在每个矩块上分别一致收敛于 φ, \dots, ψ ，则列 $\{R(\varphi_\nu, \dots, \psi_\nu)\}$ 在同样意义下收敛于 $R(\varphi, \dots, \psi)$ ；而 1—5 及 9 (当 G 为紧集) 保持可积性，即：若 $\varphi_\nu, \dots, \psi_\nu \in \mathcal{E}$ 分别 L 收敛于局部 L 可积函数 φ, \dots, ψ ，则列 $\{R(\varphi_\nu, \dots, \psi_\nu)\}$ 也 L 收敛于 $R(\varphi, \dots, \psi)$ 。至于运算 8 及 10，则既不能保持连续性，也不能保持可积性。

为了能延拓非正规算子于分布，先构造 δ 分布的正规列。
取

$$\delta_\nu(x) \in \mathcal{E}; \quad \delta_\nu(x) \equiv 0, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}\rho_\nu e, \frac{1}{2}\rho_\nu e\right),$$

其中 $\rho_\nu > 0$, $\rho_\nu \rightarrow 0$ ($\nu \rightarrow \infty$); $e = (1, \dots, 1)$; 而使

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\nu(x) dx = 1; \quad |\delta_\nu(x)| < \frac{M}{\rho_\nu^n}.$$

这种列显然存在，并作成 δ 分布的正规列。事实上， $\{\delta_\nu(x)\}$ 确为基础列，而满足定义 3 中要求及定义 6 中性质 1) 与 2)；由于 δ 分布既非连续又非可积，故可认为定义 6 中性质 3) 及 4) 也

成立。

对于任何分布 $f \in D'$ ，可如下构造正规列：

$$f_\nu = f \cdot \delta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

易核验 $\{f_\nu\}$ 确为基础列并满足定义 6 中的要求 1) — 3)。为核验 4)，假定 f 为局部 L 可积函数（不然，可认为 4) 已成立，有如上面对 δ_ν 所述）。于是对殆遍的点 $x_0 \in R^n$ 有

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho_\nu^n} \int_{I_\rho} f(x_0 - t) dt = f(x_0).$$

这里 $I_\rho = \left(-\frac{1}{2}\rho e, \frac{1}{2}\rho e\right)$ 。现在证明，对点 x_0 有

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} f_\nu(x_0) = f(x_0).$$

不妨设 $f(x_0) = 0$ 。可估计

$$\begin{aligned} |f_\nu(x_0)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_0 - t) \delta_\nu(t)| dt \\ &\leq \frac{M}{\rho_\nu^n} \int_{I_{\rho_\nu}} |f(x_0 - t)| dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

此外

$$\begin{aligned} \int_a^x f_\nu(t) dt - \int_a^x f(t) dt &= \int_a^x dt \int_{-\infty}^{\infty} [f(t - \tau) - f(t)] \delta_\nu(\tau) d\tau \\ &= \int_{I_\rho} [F(x - \tau) - F(x)] \delta_\nu(\tau) d\tau, \\ F(x) &= \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

由于 $F(x)$ 为连续函数，上式表明 $\int_a^x f_\nu(t) dt$ 在任一矩块上一致收敛于 $\int_a^x f(t) dt$ ，故 4) 成立。

建立了任一分布的正规列的存在性后，现在回到非正规算

子的延拓问题。

定义7 给定任一算子 $R(\varphi, \dots, \psi)$ 。若对所有正规列 $\{f_j\}$, $\dots, \{g_j\}$, 列 $\{R(f_\nu, \dots, g_\nu)\}$ 为基础列, 则称 R 对分布 f, \dots, g 为可行的, 并记

$$R(f, \dots, g) = [R(f_\nu, \dots, g_\nu)].$$

由定义7可看出, 这里对正规算子的延拓与定义4一致, 因正规列必为基础列。但定义7中的算子 R 不必是正规的。

至于究竟那些非正规算子对那些分布是可行的, 则无一般的有效判定准则。近年来利用非标准分析中的函数列处理广函的乘积问题, 似乎比正规列更为机动、灵活一些, 但仍缺乏有效性, 也未能给出重大的新结果。参看

Victoria Symp. on Nonstandard Analysis, Lecture Notes in Math., V. 369, 1974(Tharber, Katz, pp. 272—302)。

在具体场合, 正规列方法可给出有用的结果, 如下例所示(J. Mikusinski, Bull. Acad. Polon., Ser. Math. Astr. Phys. 24(1966)511—513)。

例3 奠定量子力学中用到的公式

$$\delta^2 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 = \frac{-1}{\pi^2} \frac{1}{x^2}. \quad (14)$$

把(14)左边作为一个整体, 单独的项 δ^2 及 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$ 缺乏定义取 δ 分布的正规列 $\{\delta_\nu\}$, 用

$$\delta_\nu^2 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{x} \cdot \delta_\nu \right)^2$$

的弱极限定义(14)的左边。改写上式为

$$\left(\delta_\nu + \frac{1}{\pi i} \frac{1}{x} * \delta_\nu\right)^2 - \frac{2}{\pi i} \delta_\nu \left(\frac{1}{x} * \delta_\nu\right).$$

现在证第一项弱收敛于 $\frac{-1}{\pi i} \delta'$ ，而第二项弱收敛于 $\frac{-1}{\pi i} \delta'$ ，则两项的差即给出 $\frac{-1}{\pi^2 x^2}$ 。

$A_\nu \equiv \delta_\nu + \frac{1}{\pi i} \frac{1}{x} * \delta_\nu$ 的 F 变换是 $\widehat{A}_\nu = \widehat{\delta}_\nu + (2H-1)\widehat{\delta}_\nu = 2H\widehat{\delta}_\nu$ ，这里 $H(\xi)$ 为 Heaviside 函数。事实上，在主值意义下^{*)}，

$$\begin{aligned} F\left[\frac{1}{x}\right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{e^{i\xi x}}{x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} \left(\frac{\cos \xi x}{x} + i \frac{\sin \xi x}{x} \right) dx, \end{aligned}$$

由于 $\frac{\cos \xi x}{x}$ 为 x 的奇函数而积分域为正、负对称的，故这一项的积分值为零，而得：

$$\begin{aligned} F\left[\frac{1}{x}\right] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{-i \sin \xi x}{x} dx \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \xi x}{x} dx = \pi i \operatorname{sgn} \xi = \pi i (2H(\xi) - 1). \end{aligned}$$

$\widehat{\delta}_\nu$ 的具体表示不必算出，重要的是在弱收敛意义下有 $\widehat{\delta}_\nu \rightarrow \widehat{\delta} = 1$ 。于是 A_ν^2 的 F 变换是 $\widehat{A}_\nu * \widehat{A}_\nu$ 。当 $\nu \rightarrow \infty$ 时，在弱拓扑下（在 S' 或 D' 中）有

$$\widehat{A}_\nu * \widehat{A}_\nu = (2H\widehat{\delta}_\nu) * (2H\widehat{\delta}_\nu) \rightarrow 4H * H$$

*) 这里在 F 变换中换 $e^{-i\xi\varepsilon}$ 为 $e^{i\xi\varepsilon}$ ，更便于计算。

$$= 4 \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi - \eta) H(\eta) d\eta = 4 \int_0^{\xi} H(\xi) d\eta = 4 H(\xi) \xi,$$

故 $A_v^?$ 弱收敛于 $\frac{1}{2\pi} F^{-1}[4H(\xi)\xi] = \frac{-1}{\pi i} \delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}$ (见盖尔方特及希洛夫, 广义函数, I, F 变换表, 公式 3, 那里的 $x_+ = H(x)x$,) 由于这里是反变换且有因子 4, 所以须用 $\frac{4}{2\pi}$ 乘那里的结果)。或直接核验如下 (应用 2.3.4 (24) 及 (21), 换 i 为 $-i$) :

$$F\left[\frac{-1}{\pi i} \delta'\right] = \frac{\xi}{\pi},$$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\pi^2} F\left[\frac{1}{x^2}\right] &= \frac{-1}{\pi^2} F\left[\frac{d}{dx} \frac{1}{x}\right] = -i\xi F\left[\frac{1}{x}\right] \frac{1}{\pi^2} \\ &= \frac{-i\xi}{\pi^2} \pi i \operatorname{sgn} \xi = \frac{|\xi|}{\pi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\left[\frac{-1}{\pi i} \delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}\right] &= \frac{\xi}{\pi} + \frac{|\xi|}{\pi} = \frac{2}{\pi} H(\xi) \xi \\ &= \frac{1}{2\pi} [4H(\xi)\xi]. \end{aligned}$$

故 (14) 的第一项弱收敛于 $\frac{-1}{\pi i} \delta' - \frac{1}{\pi^2 x^2}$ 。现在证明 $u_v =$

$\delta_v \left(\frac{1}{x} \cdot \delta_v \right)$ 弱收敛于 $\frac{-1}{2} \delta'$ 。在主值下理解积分

$$I_v = \int u_v(x) dx = \iint \frac{\delta_v(x) \delta_v(y)}{x-y} dx dy,$$

$$K_v = \int x u_v(x) dx = \iint \frac{x \delta_v(x) \delta_v(y)}{x-y} dx dy.$$

因 I_ν 的被积函数当互换 x 及 y 时变号, 故 $I_\nu = 0$. 为了算出 K_ν , 改写

$$K_\nu = 1 - \iint \frac{y \delta_\nu(x) \delta_\nu(y)}{x-y} dx dy$$

互换 x 及 y 得 $K_\nu = 1 - K_\nu$, 由此知 $K_\nu = \frac{1}{2}$. 记

$$\begin{aligned} F_\nu(x) &= \int_{-\infty}^x (x-y) u_\nu(y) dy \\ &= x \int_{-\infty}^x u_\nu(y) dy - \int_{-\infty}^x y u_\nu(y) dy, \end{aligned}$$

因 $I_\nu = 0$, $K_\nu = \frac{1}{2}$, 故当 $\nu \rightarrow \infty$ 时, 有

$$F_\nu(x) \rightarrow \frac{-1}{2} H(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2}, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

但 $u_\nu = F''_\nu$, 故 u_ν 弱收敛于 $\frac{-1}{2} H''(x) = \frac{-1}{2} \delta'$. 随之 (14) 成

立. 注意公式 $\delta \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{2} \delta'$ 在 2.4.3 例 2 中已有讨论.

注 3 结合 (14) 及例 2, 可得量子力学中的如下有用公式:

$$\begin{cases} (\delta)^2 - \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{x} \right)^2 = \frac{-1}{\pi^2} \frac{1}{x^2}, \\ \delta \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{2} \delta', \\ (\delta_+)^2 = \frac{-1}{4\pi i} \delta' - \frac{1}{4\pi x^2}, \quad \delta_+ \equiv \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\pi i x}, \\ (\delta_-)^2 = \frac{1}{4\pi i} \delta' - \frac{1}{4\pi x^2}, \quad \delta_- \equiv \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\pi i x}. \end{cases} \quad (15)$$

后两个公式容易由前两个已奠定的公式推出。 δ_{\pm} 在量子力学中称为**Heisenberg**分布。

注4 在量子场论中还用到 Dirac 分布的分数幂, 见前引 Thurber 及 Katz 的文章. 编者结合正规化方法及复阶积分, 给出 δ 的复幂 (包括分数幂), 并较简捷地证得公式 (15). 见数学研究与评论, 1(1981)119—123.

注5 附带提到编者对广函的一种形式定义途径，并由此引出广函的两种乘积(见兰州大学学报，2(1962)1-5。这里在形式上略有改动)。

根据2.2.3中关于 F 空间上广函 f 的结构定理,或一般地由有限阶广函 f 的定义,知 f 如下作用于检试函数 $\varphi \in \Phi$:

$$(f, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \int F_{\alpha}(x) \partial^{\alpha} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (16)$$

其中 $F_a(x)$ 都是局部 L 可积函数, 而要求 F_a 当 $|a| > 0$ 时无局部 L 可积的偏导数.

用 $F_{\alpha}^{|\alpha|}(x)$ 记当指标组 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 具给定长度 $|\alpha|$ 而依确定顺序作所有可能组合的函数组 $\{F_{\alpha}(x)\}$, 且指标的排列顺序对给定的 $|\alpha|$ 是统一的. 于是称由局部 L 可积函数组 $\{F_{\alpha}(x)\}$ 作成的函阵

[illegible]

$$n_m = \binom{n+m-1}{m}, \quad m < \infty$$

为 n 阶广函, 并按 (16) 作用于检试函数 $\varphi(x) \in \Phi(R^n)$.

函阵的代数运算如下定义:

$$\text{线性运算 } af + bg \equiv \{aF_a^{|\alpha|} + bG_a^{|\alpha|}\}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{点积运算 } f \cdot g &\equiv \left\{ \sum_{|\nu|=0}^{|\alpha|} F_a^{|\nu|} G_a^{|\alpha-\nu|} \right\}, \\ |\alpha| &\leq \max(m_1, m_2), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{叉积运算 } f \times g &\equiv \{F_a^{|\alpha|} \{G_b^{|\beta|}\}\} \equiv \{H_r^{|\gamma|}\}, \\ r &\leq m_1 + m_2. \end{aligned} \quad (19)$$

其中 $F_a^{|\alpha|}$, $G_a^{|\alpha|}$ 分别是 f, g 的分量, m_1, m_2 是相应的阶. (19) 由 Kronecker 乘积构成, 即用函阵 $\{G_b^{|\beta|}\}$ 乘每个元 $F_a^{|\alpha|}(x)$, 然后整理、合并同指标组的乘积元, 例如:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} F_0^0 \\ F_{\{1,0\}}^1, F_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\} \times \left\{ \begin{matrix} G_0^0 \\ G_{\{1,0\}}^1, G_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} F_0^0 G_0^0 \\ F_0^0 G_{\{1,0\}}^1 + G_0^0 F_{\{1,0\}}^1, F_0^0 G_{\{0,1\}}^1 + G_0^0 F_{\{0,1\}}^1, \\ F_{\{1,0\}}^1 G_{\{1,0\}}^1, F_{\{1,0\}}^1 G_{\{0,1\}}^1 + F_{\{0,1\}}^1 G_{\{1,0\}}^1, \\ F_{\{0,1\}}^1 G_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\}, \end{aligned}$$

这两个函阵的点积则是:

$$\begin{aligned} &\left\{ \begin{matrix} F_0^0 \\ F_{\{1,0\}}^1, F_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} G_0^0 \\ G_{\{1,0\}}^1, G_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} F_0^0 G_0^0 \\ F_0^0 G_{\{1,0\}}^1 + G_0^0 F_{\{1,0\}}^1, F_0^0 G_{\{0,1\}}^1 + G_0^0 F_{\{0,1\}}^1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

两种乘积对连续函数归为通常乘积, 并有单元 1, 但 x 无逆元, 因 $\frac{1}{x}$ 不是局部可积的, 若取 $x^{-1} = [x(\ln|x| - 1)]''$, 则 x^{-1} 为二阶广函, 在上述两种乘法运算下, 都不是 x 的逆元.

还可注意，两种乘法都是交换的及结合的。

下面是几个简单例子 (H 为 Heaviside 函数)，

$$\delta \cdot \delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\delta \times \delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{Bmatrix} = \delta',$$

$$\delta \cdot \delta' = \begin{Bmatrix} 0 \\ -H \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0.$$

注6 近年来出现用代数拓张等处理广函乘积的方法，有较大概括性。例如见

E. E. Rosinger, *Distributions and Nonlinear Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.

В. К. Иванов, ДАН, 237(1977) 779—781; Изв. Вис. Уч. Зав. Мат. 10(1977)65—69.

D. Baumgarten, Mitt. Math. Sem. Giessen Heft 123 (1977)161—173.

R. A. Struble, Studia Math. 37(1971) 103—109.

J. F. Colombeau, *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, North-Holland, Elsevier, 1984.

2.5 广函的除法

广函的除法问题与多种方程的求解问题有关。相对地说，以解析函数除广函的讨论比较成熟；一般情形则甚少考虑。

2.5.1 一维情形

许多重要方程(不限于一维情形)都属于卷积方程的范围; 给定 $f \in \mathcal{D}'$, $g \in D'$, 求 $u \in D'$, 使

$$f * u = g. \quad (1)$$

例如当 $f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$ 时, (1) 归为常系数线性微分方程

$$f * u = \sum a_\alpha \partial^\alpha u = g(x),$$

而当 $f = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \delta(x - x_\alpha)$ 时, 得常系数差分方程

$$f * u = \sum a_\alpha u(x - x_\alpha) = g(x),$$

当 $f = K(x)$ 时, 则得第一类积分方程

$$f * u = \int K(x - y) u(y) dy = g(x).$$

显然, f 可为上述三种广函的线性组合, 于是相应可得更复杂的方程.

在(1)中限定 $f \in \mathcal{D}'$, 在于保证广函卷积的存在性. 显然, 这个要求仅属充分, 而非必要的.

根据2.3.4定理20及21, 知对(1)可作 F 变换, 而得

$$\widehat{f} \cdot \widehat{u} = \widehat{g}, \quad (2)$$

且 \widehat{f} 为对固定的 $\eta = \operatorname{Im} \xi$ 关于 $\xi = \operatorname{Re} \xi$ 具幂增率的一阶整函数; \widehat{u} 及 \widehat{g} 则为 $Z = \widehat{D}$ 上广函. 故求解代数方程(2) 归为广函与整函数的除法问题.

本段先考虑一维情形^{*)}.

^{*)} 参看 L. Schwartz, *Theorie des Distributions*, Tom 1, 1950, chap. 5, § 4 及 § 5.

对给定的广函 S ，当 $H(x) \in \mathcal{S}$ 且无零点时，除法问题是显然可解的：存在唯一的广函 $T = \frac{S}{H}$ ，使

$$HT = S.$$

因此，问题出现于 H 有零点的情形。下面分成几个步骤进行考虑。

1) 以 x 相除。对给定广函 S ，存在无限多广函 T ，满足方程

$$xT = S.$$

显然，在点 $x = 0$ 外， T 如下唯一确定： $T = \frac{S}{x}$ 。为使除法

问题一般可解，在分布情形，当且仅当对所有具形 $\varphi = x\psi \in D$ 的检验函数有 $T(\varphi) = S(\psi)$ 。记 D 中可用 x 除尽的函数 φ 作成的子空间为 E 。由关系式 $xT = S$ 知 T 在 E 上有定义。为了在 D 中确定 T ，只须知道 T 对 D 中不属 E 的某元 φ_0 的作用值 $T(\varphi_0)$ 。

特别取 φ_0 使 $\varphi_0(0) = 1$ ，则对任一个 $\tilde{\varphi} \in D$ ，有唯一的分解：

$$\tilde{\varphi} = \lambda\varphi_0 + \varphi, \quad \varphi \in E.$$

易知 $\lambda = \tilde{\varphi}(0)$ 。注意对 E 中元 φ 有

$$\varphi = \tilde{\varphi} - \lambda\varphi_0 = x\psi, \quad \psi \in D.$$

于是应有

$$T(\tilde{\varphi}) = \lambda T(\varphi_0) + S(\psi), \quad (3)$$

故 $T(\varphi_0)$ 应先给定。反之，设 φ_0 已选定且 $T(\varphi_0)$ 取给定的值，则(3)定义 T 为 D 上连续线性泛函，且为广函除法问题的解。

事实上，当 $\tilde{\varphi}$ 在 D 中趋于零时， λ 也趋于零，故 $\lambda T(\varphi_0)$ 亦然。剩

下只须证明这时也有 $S(\psi) \rightarrow 0$ 或 $\psi \rightarrow 0$ 。为此可证明：当 $\varphi = \tilde{\varphi} - \lambda \varphi_0 \rightarrow 0$ (在 E 中) 时，有 $\psi = \frac{\varphi}{x} \rightarrow 0$ (在 D 中)。今

$$\begin{aligned}\psi^{(m)} &= \left(\frac{\varphi}{x}\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \left(\frac{1}{x}\right)^{m-k} \varphi^{(k)} \\&= \sum \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m-k} (m-k)!}{x^{m-k+1}} \varphi^{(k)} \\&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m-k} (m-k)!}{x^{m-k+1}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{m-k} \frac{x^\nu}{\nu!} \varphi^{(k+\nu)}(0) \right. \\&\quad \left. + \frac{x^{m-k+1}}{(m-k+1)!} \varphi^{(m+1)}(\theta_k x) \right\} \\&= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m-k} \varphi^{(m+1)}(\theta_k x)}{m-k+1} \\&\quad + \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^m \varphi^{(j)}(0)}{x^{m-j+1}} \cdot \frac{m!}{j!} \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k j!}{k!(j-k)!}.\end{aligned}$$

其中 $\theta_k \in (0, 1)$ 。由于 $\varphi^{(0)}(0) = 0$ 且当 $j > 0$ 时有

$$\sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k j!}{k!(j-k)!} = (1-1)^j = 0,$$

故上式简化为

$$\psi^{(m)} = \left(\frac{\varphi}{x}\right)^{(m)} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^{m-k}}{m-k+1} \varphi^{(m+1)}(\theta_k x),$$

由此得

$$|\psi^{(m)}(x)| \leq A_k \max_{|t| \leq |x|} |\varphi^{(m+1)}(t)|.$$

这就能保证：当 $\varphi \rightarrow 0$ (在 E 中)，有 $\psi \rightarrow 0$ (在 D 中)。因此，当

$\tilde{\varphi} \rightarrow 0$ (在 D 中) 时, 有 $T(\tilde{\varphi}) \rightarrow 0$. 故 (3) 确定 T 为 D 上的连续线性泛函; 且特别当 $\tilde{\varphi} \in E$ 时, 有

$$T(\tilde{\varphi}) = T(x\psi) = (xT, \psi) = (S, \psi),$$

既然 ψ 为 D 中任一元, 知 T 确满足方程 $xT = S$.

最后, 注意 $xT = S$ 的两个不同的解 T_1 及 T_2 对应于 $T(\varphi_0)$ 的两个不同的值, 故

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2, \tilde{\varphi}) &= (T, \tilde{\varphi}) - (T_2, \tilde{\varphi}) \\ &= \lambda[T_1(\varphi_0) - T_2(\varphi_0)] = c\lambda = c\tilde{\varphi}(0). \end{aligned}$$

由此知 $T_1 - T_2 = c\delta(x)$, 这里 $c = T_1(\varphi_0) - T_2(\varphi_0)$.

注1 对不同的 $\varphi^{(j)}$, $j = 1, 2$, 解 T_1 及 T_2 仍仅相差 $c\delta(x)$.

事实上, 任一个 $\tilde{\varphi} \in D$ 有两种分解

$$\tilde{\varphi} = \lambda\varphi_0^{(1)} + \varphi_1 = \lambda\varphi_0^{(2)} + \varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in E.$$

仍有 $\lambda = \tilde{\varphi}(0)$. 于是

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2, \tilde{\varphi}) &= \lambda[T_1(\varphi_0^{(1)}) - T_2(\varphi_0^{(2)})] \\ &\quad + S(\psi_2 - \psi_1). \end{aligned}$$

其中 $\psi_j = \frac{\varphi_j}{x}$, $j = 1, 2$. 但 $\psi_2 - \psi_1 = \lambda(\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)})$, $\psi_0^{(j)} =$

$\frac{\varphi_0^{(j)}}{x}$, $j = 1, 2$. 故

$$(T_1 - T_2, \tilde{\varphi}) = c\lambda = c\tilde{\varphi}(0) = (c\delta, \tilde{\varphi}).$$

这里 $c = T_1(\varphi_0^{(1)}) - T_2(\varphi_0^{(2)}) + S(\psi_0^{(2)} - \psi_0^{(1)})$. 由此仍得 $T_1 - T_2 = c\delta$.

2) 以 x^n 相除. 对给定广函 S , 存在无限个广函 T , 满足

方程

$$x^m T = S,$$

且任何两个解 T_1 及 T_2 之差为

$$T_1 - T_2 = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \delta^{(j)}(x),$$

a_j 都是常数。

事实上，可逐次以 x 除 S ，共除 m 次。由此知解 T 确存在。至于 T 在点 $x=0$ 的不定性，则可如下证明。差 $T = T_1 - T_2$ 满足齐次方程 $x^m T = 0$ ，故 T 以点 $x=0$ 为台。据 2.3.2 定理 11 知应有

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j c_j \delta^{(j)}(x),$$

但由 2.4.2(6') 可算出

$$x^m T = \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^j \frac{j!}{(j-m)!} c_j \delta^{(j-m)}(x) = 0,$$

故应有 $c_j = 0$ ($j \geq m$)。由此即得 $T_1 - T_2 = \sum_{j=0}^{m-1} a_j \delta^{(j)}(x)$ 。

3) 以仅具有有限重孤立零点的无穷可微函数 $H(x)$ 相除。显然，在不是 H 的零点的所有点近旁，除法问题是唯一可解的；而在 H 的 m_j 重孤立零点 $x = a_j$ 近旁，改写 $\frac{1}{H}$ 如下

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{(x-a_j)^{m_j}} \cdot \frac{(x-a_j)^{m_j}}{H},$$

因 $\frac{(x-a_j)^{m_j}}{H}$ 在点 a_j 近旁无穷可微，故问题归为以 $(x-a_j)^{m_j}$

相除。根据上面所论，除法问题总是可解的，且在点 a_j 近旁，任何二解 T_1 及 T_2 之差具形

$$T_1 - T_2 = \sum_{j=1}^k \left\{ \sum_{\nu=0}^{m_j-1} c_{j\nu} \delta^{(\nu)}(x - a_j) \right\},$$

k 为零点的个数。

容易知道，以具无限重零点的无穷可微函数除任意广函，一般是无解的。

下面对多维情形作某些一般性的考察。

1) 在 $D'(R^n)$ 中以 x_j 相除总是可能的。为证明这一点，只须重复一维情形的讨论。

2) 若以某 $H \in \mathcal{E}$ 相除时为局部可行的，则必全局可行。事实上，取 R^n 的局部有限开覆盖列 $\{\Omega_j\}$ ，使在每个 Ω_j 中可用 H 除 $S \in D'$ ，则由分布的全局结构(2.3.2定理9)知 $S = \sum_j S_j$ ，且 $\text{supp } S_j \subset \Omega_j$ 。据假定，存在 T_j 使 $HT_j = S_j$ 。总可认为 $\text{supp } T_j \subset \Omega_j$ ；不然用在 $\text{supp } S_j$ 某邻域中为1的函数 $\alpha(x) \in D(\Omega_j)$ 乘 T_j 即可。于是方程 $HT = S$ 的全局解为 $T = \sum_j T_j$ ，

且这个级数实际上是局部有限项的。

3) 设 \mathcal{E} 中函数 $H(x)$ 的零点集 $N^{n-1} = \{H(x) = 0\}$ 为 $n-1$ 维无奇点曲面，即 H 的所有一阶导数在 N^{n-1} 上不同时为零。简称这类函数为正规函数。显然，在 N^{n-1} 外各点近旁，以 H 相除在 D' 中总是可行且解为唯一的。在 N^{n-1} 上每点的近旁，经独立变量的代换，可把 H 变为 x_n ，故除法仍然可能。于是以 H 相除为局部可行。根据上述，以 H 相除亦为全局可行的（显然，正规性要求仅属充分，远非必要）。

4) 若以 \mathcal{E} 中二函数 H 和 K 相除为分别可行的, 则以积 HK 相除必为可行的. 事实上, 可用 H, K 逐次相除. 一般, 若 P, \dots, Q 为 \mathcal{E} 中分别可除除式, 而 l, \dots, m 为有限正整数, 则以积 $P^l \dots Q^m$ 相除总是可能的.

2.5.2 以多项式相除

线性常系数偏微分方程的求解问题, 在 F 变换下, 等价于广函以多元多项式相除的问题.

尽管上段对多维情形的除法问题得到一些颇具概括性的结论, 但并不能解决多项式相除的问题, 因为对椭圆多项式 $x_1^2 + \dots + x_n^2$ 这样简单而且性质很好的函数, 并不能得出除法可行性的判断. 这个多项式既不是正规函数, 也不是正规函数的幂之积.

五十年代初已证明: 广函以多项式相除总是可行的, 或常系数线性偏微分方程总是局部可解的. 下面介绍 Ehrenpreis 的讨论. 参看 Amer. J. Math. 76(1954)883—903.

引理1 设在复平面上给定 m 个点 z_1, \dots, z_m , 则以任一点 a 为心作半径 ≤ 1 的圆周 L , 对任一点 $z \in L$, 有 $\min |z - z_j| \geq \frac{1}{2(m+1)}$.

证 不失一般性, 可认为 a 是原点. 设 z_1, \dots, z_r 位于单位圆或圆周上, z_{r+1}, \dots, z_m 位于单位圆外. 在单位间隔 I 上最多有 $r+2$ 个点: $0, |z_1|, \dots, |z_r|, 1$, 而分 I 最多为 $r+1$ 个子间隔. 这些子间隔之一至少具长度 $\frac{1}{r+1}$. 设这个子间隔的中点为 b . 取 L 为以原点为心而以 b 为半径的圆周, 则对任一点 $z \in L$, 任一个 $j = 1, \dots, m$, 有

$$|z - z_j| \geq ||z| - |z_j|| = |b - |z_j|| \\ \geq \frac{1}{2(r+1)} \geq \frac{1}{2(m+1)}.$$

引理2 设 Q 为单元的 m 次多项式:

$$Q(x) = Q_0 x^m + Q_1 x^{m-1} + \cdots + Q_m,$$

则存在仅与 m 相关的常数 $\alpha \neq 0$, 使对以任一复点 a 为心而半径 ≤ 1 的圆周 M , 有

$$|Q(x)| \geq \alpha |Q_0|, \quad \forall x \in M.$$

证 总可认为 $Q_0 \neq 0$. 设 x_1, \dots, x_m 为 Q 的零点, 则有

$$Q(x) = Q_0(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m).$$

据引理1, 可作以 a 为心且半径 ≤ 1 的圆周 M , 使对所有 $x \in M$ 及 $1 \leq j \leq m$ 有 $|x - x_j| \geq \frac{1}{2(m+1)}$. 故对所有的 $x \in M$, 有

$$|Q(x)| \geq \frac{|Q_0|}{\alpha^m (m+1)^m}. \quad \text{取 } \alpha = 2^{-m}(m+1)^{-m}, \text{ 即得引理.}$$

引理3 设 Q 为 n 元多项式, 不为常数. 对 $r > 1$, 记 $C_r = \{z, z \in \mathbb{C}^n, |Im z_j| \leq r, j = 1, \dots, n\}$. 设 $F(z) \in Z = \widehat{D}$ 并满足

$$\sup_{z \in C_r} |Q(z)F(z)| \leq \alpha$$

对某 $x_p (1 \leq p \leq n)$, 记 $Q = Q_0 x_p^m + \cdots + Q_m, Q_j (j = 0, 1, \dots, m)$ 是 $x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n$ 的多项式. 则存在 $\beta > 0$, 使

$$\sup_{z \in C_{r-1}} |Q_0(z)F(z)| \leq \alpha \beta$$

证 不失一般性, 可认为 $p = 1$. 设 z_1, \dots, z_n 为复数, 使 $|Im z_j| \leq r-1, j = 1, \dots, n$. 据引理2, 存在数 $\alpha > 0$ 及以 z_1 为心而半径 ≤ 1 的圆周 M , 使对所有 $z \in M$, 有

$$|Q(z, z_2, \dots, z_n)| \geq \alpha |Q_0(z_2, \dots, z_n)|,$$

于是对所有的 $z \in M$ 得 (注意 $(z, z_2, \dots, z_n) \in C_r$):

$$\begin{aligned} & \alpha |Q_0(z_2, \dots, z_n) F(z, z_2, \dots, z_n)| \\ & \leq |Q(z, z_2, \dots, z_n) F(z, z_2, \dots, z_n)| \leq a. \end{aligned}$$

取 $\beta = \frac{1}{2}$, 有

$$|Q_0(z_2, \dots, z_n) F(z, z_2, \dots, z_n)| \leq a\beta \quad \forall z \in M,$$

若 $Q_0(z_2, \dots, z_n) = 0$, 显然有

$$|Q_0(z_2, \dots, z_n) F(z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq a\beta;$$

若 $Q_0(z_2, \dots, z_n) \neq 0$, 则对所有的 $z \in M$,

$$|F(z, z_2, \dots, z_n)| \leq a\beta / |Q_0(z_2, \dots, z_n)|;$$

因 F 为 z_1 的整函数, 据极大模定理有

$$|F(z_1, z_2, \dots, z_n)| \leq a\beta / |Q_0(z_2, \dots, z_n)|,$$

故在任何情况, 总得到 $|Q_0(z_2, \dots, z_n) F(z_1, \dots, z_n)| \leq a\beta$. 由于 (z_1, \dots, z_n) 是 C_{r-1} 中任一点, 故引理一般成立.

定理1 设 Q 为 n 元多项式, 不为零, $\{F_j\} \subset Z$, 若在 Z 中有 $QF_j \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$), 则在 Z 中有 $F_j \rightarrow 0$.

证 对 Q 中变元的个数 k 应用归纳法. 当 $k=0$ 时, Q 为不等于零的常数, 定理显然成立. 设定理当某个 $k>0$ 对含 $k-1$ 个元的所有多项式成立. 不失一般性, 可认为 x_1, \dots, x_k 都出现于 Q 中, 并记

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_k) &= Q_0(x_2, \dots, x_k)x_1^m + \dots \\ &+ Q_m(x_2, \dots, x_k), \quad Q_0 \neq 0, \end{aligned}$$

据 2.1.3 定理 13, 列 $\{QF_j\}$ 应含于某个 $Z(a) = \widehat{D}(a)$, 且在其中的 $QF_j \rightarrow 0$. 因多项式 Q 不影响 F_j 的阶及型, 故 $\{F_j\} \subset Z(a)$. 于是对任意的 $r>0$ 及 n 元多项式 P , 在 C_r 上一致有 $PQF_j \rightarrow 0$. 引理 3 表明列 $\{Q_0F_j\}$ 也有这种性质, 即: 对任何 $r>0$ 及 n 元

多项式 P , 在 C_r 上一致有 $Q_0 P F_j \rightarrow 0$, 即在 $Z(a)$ 中有 $Q_0 F_j \rightarrow 0$. 但 Q_0 为 $k-1$ 元多项式, 据归纳法假定, 在 $Z(a)$ 中随之在 Z 中有 $F_j \rightarrow 0$.

推论1 设 $P(D)$ 为常系数线性偏微分算子, $\{f_j\} \subset D$ 且在 D 中 $P f_j \rightarrow 0$, 则在 D 中 $F_j \rightarrow 0$.

对任意的 $k > 0, s \geq 0$, 记 $D_k^s(R^n) = \{\varphi(x); \varphi \in C_0^\infty, \text{supp } \varphi \subset R_k\}$, 这里 $R_k = \{x; |x_j| \leq k, j=1, \dots, n\}$. 用半范列 $\{p_j(f) = \max_{x \in R^n} |\partial^j f(x)|\}$ 定义 D_k^s 中拓扑. 记 $D^s = \bigcup_{k=1}^\infty D_k^s$, 其

对偶空间 D'^s 是 s 阶分布空间; $D'_r = \bigcup_{s=1}^\infty D'^s$ 是所有有限阶分布的空间.

设 $P(D)$ 为 m 阶常系数偏微分算子. 用 PD_k^{s+m} 记具形 $Pf (f \in D_k^{s+m})$ 的函数的集, 它是 D_k^s 的子空间, 可赋以 D_k^s 中拓扑的导拓扑.

定理2 对任何 $S \in D'_r$, 存在 $T \in D'_r$ 使 $P^*(D)T = S$, 这里 $P^* = \overline{P}(D)$ 为 P 的伴算子, \overline{P} 表示对系数取复共轭值. 特别, P^* 在 D'_r 中有基本解 F : $P^*F = \delta$.

证 设 S 为 s 阶分布. 类似于定理1证明中的讨论, 知 $P\varphi \rightarrow \varphi$ 为 PD^{s+m+3} 到 D^s 的连续线性映射. 故 $(T, P\varphi) \rightarrow (S, \varphi)$ 为 PD^{s+m+3} 上的连续线性泛函. 记

$$K = \{\varphi; \varphi(x) \in PD^{s+m+3}, \max_{x \in R^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \leq 1,$$

$$|\alpha| \leq s+4\},$$

则对每个整数 j , $K_j = K \cap D_j^{s+3}$ 是 PD_j^{s+m+3} 中的紧集 (据 Ascoli-Arzelà 定理); 并记 $U_j = \{\varphi; \varphi \in K_j, |(T, \varphi)| < 1\}$, $\bigcup_j U_j$ 的凸闭包为 V . 据 2.1.1 中讨论, V 是 PD^{s+m+3} 中一个零

元邻域。此外, 对 $\varphi \in V$, 有 $|(T, \varphi)| \leq 1$. 故 T 为 $PD^{s+s'}$ 上的连续线性泛函, 而可延拓为空间 $D^{s+s'}$ 上的连续线性泛函, 仍记为 T . 对任一个 $\varphi \in D$, 有

$$(P^*T, \varphi) = (T, P\varphi) = (S, \varphi).$$

故在弱意义下有 $P^*T = S$; 特别取 $S = \delta$, 存在 F 使 $P^*F = \delta$.

推论2 任何多项式在广函空间 \widehat{D}'_F 上是可除的, 这里 \widehat{D}'_F 是 D'_F 的 F 变换空间.

注2 关于以多项式除广函的问题, 在多种广函空间都得出肯定结果. 例如

B. Malgrange (C.R. Paris, 237:25(1953)1620—1622; Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 6(1955/56)271—354; Sem. Schwartz, 4(1959/60)21—25) 建立了如下的一些关系:

$$PD'_F = D'_F, \quad P\mathcal{E} = \mathcal{E},$$

$$PC^r \supset C^p \quad (p \geq m, r = p - d, d > 0 \text{ 为任意的}).$$

L. Ehrenpreis (Amer. J. Math., 76(1954) 883—903, 77(1955)286—292; 78(1956)685—715; 82(1960) 522—588; 84(1962)324—348) 除上述前两个关系外, 还得到如下结果:

$$PH = H, \quad PH_a = H_a, \quad P\mathcal{O} = \mathcal{O}.$$

这里 H 为整函数空间; $H_a (a > 1)$ 为阶 $\leq a$ 的整函数空间; \mathcal{O} 为形式幂级数空间.

L. Hörmander (Ark. för Mat., 3(1958)555—568) 给出关系

$$PS' = S'.$$

5.3 以整函数相除^{*}

考虑一般的卷积方程

^{*} 本段取材于 L. Hörmander, Ann. Math. 76(1962)148—170.

$$S \cdot u = f, \quad S, f \in \mathcal{D}', \quad (4)$$

相应的除法问题是

$$\widehat{S u} = \widehat{f}. \quad (5)$$

先作一些预备性讨论。记

$$\|\varphi\|_j = \sup_K \sum_{|\alpha| \leq j} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C_0^\infty(K).$$

引理4 若对某含内点的紧集 K 有

$$\|\varphi\|_0 \leq C \|S \cdot \varphi\|_N, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(K), \quad (6)$$

则存在常数 A_1, A_2, A_3 , 使对每一点 $\xi \in R_*$, 有点 $\eta \in R^*$, 使

$$|\xi - \eta| \leq A_1 \ln(2 + |\xi|), \quad |\widehat{S}(\eta)| \geq (A_2 + |\xi|)^{-A_3}. \quad (7)$$

证 不失一般性, 可认为 K 是点 $x = 0$ 的闭凸邻域。取某固定函数 $\psi(x) \in C_0^\infty(K)$, 使

$$\psi \geq 0, \quad \int \psi dx = 1,$$

并用 F 变换关系

$$\widehat{\psi_k}(\xi) = \left[\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right]^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

定义列 $\{\psi_k(x)\}$, 即 ψ_k 为函数 $k^* \psi(kx)$ 的 k 重卷积; 且因 $\text{supp } \psi(kx) \subset \frac{K}{k}$, 知 $\text{supp } \psi_k \subset K$ 。对每个 k , 有

$$|\widehat{\psi_k}(\xi)| \leq 1.$$

事实上,

$$|\widehat{\psi_1}(\xi)| = \left| \int \psi(x) e^{-i x \xi} dx \right| \leq \int \psi(x) dx = 1,$$

$$|\widehat{\psi_k}(\xi)| = \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right|^k \leq 1.$$

由于 $\widehat{\psi}(\xi)$ 当 $|\xi| \rightarrow \infty$ 时趋于零且 $|\widehat{\psi}(\xi)| < 1$, $\xi \neq 0$, 故存在常数 $a > 0$, 使当 $|\xi| \geq 1$ 时有 $|\widehat{\psi}(\xi)| \leq e^{-a}$. 于是

$$|\widehat{\psi}_k(\xi)| \leq e^{-ak}, \quad |\xi| \geq k.$$

今证明: 若取 A_2 充分大, 取 A_1 及 A_3 使

$$A_1 > \frac{\mu + N}{a}, \quad A_3 > N,$$

则(7)成立. 上式中的 μ 为分布 S 的阶 (注意 $S \in \mathcal{S}'$ 为紧台分布). 设若不然而对如上选取的 A_1 及 A_3 , (7)对任何的 A_2 都不成立, 则存在点列 $\{\xi_j\} \subset R_n$, $\xi_j \rightarrow \infty$, 使

当 $|\eta - \xi_j| \leq A_1 \ln(2 + |\xi_j|)$ 时, 有

$$|\widehat{S}(\eta)| \leq |\xi_j|^{-A_3}, \quad (8)$$

取 k 为 $A_1 \ln(2 + |\xi_j|)$ 的整数部分. 记 $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\psi}(\xi - \xi_j)$, 有

$$\begin{aligned} \varphi_j \in C_0^\infty(K); \quad \|\varphi_j\|_0^2 &\geq C \int |\varphi_j|^2 dx = \frac{C}{(2\pi)^n} \\ &\times \int \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right|^{2k} d\xi \rightarrow \infty \quad (j, k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

这里 $C = \frac{1}{\text{mes } K}$, 因 K 具内点, $\text{mes } K > 0$. 事实上, 函数

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right]^k &= \left[\widehat{\psi}(0) + \frac{\xi}{k} \widehat{\psi}'\left(\frac{\theta\xi}{k}\right) \right]^k = \left[1 + \frac{\xi}{k} \widehat{\psi}'\left(\frac{\theta\xi}{k}\right) \right]^k \\ &0 < \theta_1, \dots, \theta_n < 1 \end{aligned}$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于某指数函数, 而非平方可积的.

另一方面, 可证明(6)的右边当换 φ 为 φ_j 时随 $j \rightarrow \infty$ 而趋于零. 故得矛盾. 为证明这一点, 注意

$$\sup |\partial^\alpha \varphi| = \sup \left| \int \xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} \frac{d\xi}{(2\pi)^n} \right|,$$

故只须证明

$$\int (1 + |\xi|)^N |\widehat{S}(\xi) \widehat{\varphi}_j(\xi)| d\xi \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty).$$

由于 $|\widehat{\varphi}_j| \leq 1$ 且球 $|\xi - \xi_j| \leq k$ 的测度具阶 $O(k^n)$, 故由(8)知上式右边沿球的积分的绝对值不超过

$$C(1 + |\xi_j| + k)^N |\xi_j|^{-A_2} k^n$$

既然 $A_2 > N$, $k = O(\ln |\xi_j|)$, 沿球 $|\xi - \xi_j| \leq k$ 的积分值当 $j \rightarrow \infty$ 时趋于零. 为估计球外的积分, 注意由 2.3.4 定理 20 式(25) 当 $\text{Im } s = 0$ 时有

$$|\widehat{S}(\xi)| \leq C_1 (1 + |\xi|)^\mu.$$

应用初等不等式

$$1 + |\xi| \leq (1 + |\xi_j|)(1 + |\xi - \xi_j|),$$

可得

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi - \xi_j| > k} (1 + |\xi|)^N |\widehat{S}(\xi) \widehat{\varphi}_j(\xi)| d\xi \\ & \leq C_1 (1 + |\xi_j|)^{\mu+N} \int |\widehat{\psi}_k(\xi)| (1 + |\xi - \xi_j|)^{\mu+N} d\xi \\ & \leq C_1 e^{-a(k-1)} (1 + |\xi_j|)^{\mu+N} \\ & \quad \times \int (1 + |\xi - \xi_j|)^{\mu+N} \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right| d\xi, \end{aligned}$$

经变量代换易知后一积分具阶 $O(k^{\mu+N})$, 而由 k 的选择知

$(2 + |\xi_j|) \leq e^{\frac{(k+1)}{A_1}}$, 但因 $\frac{\mu+N}{A_1} < a$, 知上式右边当 $k \rightarrow \infty$ 时趋

于零. 引理证毕.

定义1 若 $\widehat{S}(\xi)$ 具性质(7), 即称 \widehat{S} 为缓降的, 相应称 S 为可逆的.

这个定义及引理4属于Ehrenpreis.

引理5*) 设 $S \in \mathcal{S}'$ 为不可逆分布, 则对 R^n 中每个具内点的紧集 K , 存在连续函数 φ , $\text{supp } \varphi \subset K$, 使 $S \cdot \varphi \in C_0^\infty$, 但 φ 不属于 C^1 .

证 若引理不真, 使所述的 φ 必属 C^1 , 则有

$$\|\varphi\|_1 \leq C\{\|\varphi\|_0 + \|S \cdot \varphi\|_N\}, \quad (9)$$

选择 φ_j 如上, 得

$$\|\varphi_j\|_0 \leq \int \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right|^{2k} d\xi \leq \int \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right| d\xi = Ck^n$$

故(9)右边当 $\varphi = \varphi_j$ 时具阶 $O(k^n) = o(|\xi_j|)$.

另一方面, 由Parseval等式有

$$\left\{ \int (1 + |\xi|)^2 |\widehat{\varphi_j}(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C \|\varphi_j\|_1,$$

上式左边大于量

$$\left\{ \int_{|\xi| \leq 1} (1 + |\xi + \xi_j|)^2 \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right|^{2k} d\xi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

而由于 $\int_{|\xi| \leq 1} \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{k}\right) \right|^{2k} d\xi$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时的极限值不为零, 这个量至少具阶 $O(|\xi_j|)$. 所得估计与(9)矛盾. 故引理真.

引理6 设 $S \in \mathcal{S}'$ 可逆, K 为 R^n 中任一紧集, 则存在常数 C 及 N , 使(6)成立.

证 先证明一个辅助的不等式. 设 $F(z)$, $G(z)$ 及 $\frac{F(z)}{G(z)}$ 在

*) 这个引理与除法问题无关. 这里提到它, 为的是揭示可逆分布的性质.

\mathbb{C}^n 的某球 $|z| < R$ 中解析. 若在此球中 $|F| < A$, $|G| < B$, 则

$$\left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| \leq AB^{\frac{2+|z|}{R-|z|}} |G(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)},$$

$$|z| < R. \quad (10)$$

不妨设 $A = B = 1$ (不然换 $F = AF_1$, $G = BG_1$, 可达到目的), 并在一维情形证明. 于是

$$\left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| \leq \frac{1}{|G(z)|}. \quad (11)$$

对正调和函数 $-\ln|G(z)|$ 应用 Harnack 不等式得

$$-\ln|G(z)| \leq -\frac{R+|z|}{R-|z|} \ln|G(0)|, \quad |z| < R,$$

或

$$\left| \frac{1}{G(z)} \right| \leq |G(0)|^{-(R+|z|)/(R-|z|)}, \quad |z| < R.$$

结合(11)即得(10). 由(10)可推知: 若 $F, G, \frac{F}{G}$ 都是整函数,

则对每个 $r > 0$ 有

$$\left| \frac{F(z)}{G(z)} \right| \leq \frac{\sup_{|z-\xi|<r} |F(\xi)| \sup_{|z-\xi|<r} |G(\xi)|}{\left[\sup_{|z-\xi|<r} |G(\xi)| \right]^2}. \quad (12)$$

事实上, 取 $R = 3r$ 并平移坐标原点于球 $|z-\xi| < r$ 中点 ξ , 再应用(10), 即得(12).

现在证明引理. 取 $\varphi \in C_0^\infty(K)$; 设 N 为某个非负整数. 记 $\psi = S \cdot \varphi$, 有 $\hat{\psi}(\xi) = \hat{S}(\xi) \hat{\varphi}(\xi)$. 对与 N 有关的某个常数 C , 有:

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq C e^{R(1+\ln \xi)} (1+|\xi|)^{-N} \|\psi\|_N,$$

这里 $R = \sup_{\Omega} |x|$, Ω 为 $\text{supp } S$ 沿 K 平移所得点集. 应用(12) 而

取 $r = A_1 \ln(2 + |\xi|)$, 并注意据可逆性定义 1, \widehat{S} 具性质(7), 故对实的 ξ 有

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq \sup_{|\xi-z| < 4r} |\widehat{\psi}(z)| \sup_{|\xi-z| < 4r} |\widehat{S}(z)| (A_2 + |\xi|)^{2A_3}.$$

另一方面, 由 2.3.4(25) 知

$$|\widehat{S}(z)| \leq C e^{H(1+\ln z)} (1+|z|)^B,$$

故得

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C_1 (1+|\xi|)^{k-N} \|\psi\|_N, \quad \xi \in R_n, \quad (13)$$

$$k = 4(R+H)A_1 + B + 2A_3.$$

取 $N > k + n$, 由(13) 及 F 变换反转公式知(6) 成立:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_0 &= \frac{1}{2\pi} \sup \left| \int \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \right| \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \|\psi\|_N \int \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^{N-k}} \leq C_1 \|\psi\|_N = C_1 \|S \cdot \varphi\|_N, \end{aligned}$$

至此引理证明完毕.

定理3 在卷积方程(4)中, 若 $\frac{\widehat{f}}{\widehat{S}}$ 为整函数, 且 \widehat{S} 缓降, 则

(4) 有解 $u \in \mathcal{D}'$; 特别若 $f \in C_0^\infty$, 则 $u \in C_0^\infty$.

证 和证明(13) 一样, 可得

$$\left| \frac{\widehat{f}}{\widehat{S}} \right| \leq c (1+|\xi|)^B e^{H(1+\ln \xi)}.$$

据2.3.4定理20, 知 $\widehat{\frac{f}{S}}$ 是某个 $u \in \mathcal{E}'$ 的 F 变换; 特别若 $f \in C_0^\infty$,

则(13)对任何 N 成立, 于是 u 的各阶导数

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha u(x)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int \widehat{u}(\xi) (i\xi)^\alpha e^{ix\xi} d\xi \right| \\ &\leq \frac{C_1}{2\pi} \|\psi\|_N \int \frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|)^{N-k}} d\xi \end{aligned}$$

存在且具紧台(因 $u \in \mathcal{E}'$), 故 $u \in C_0^\infty$.

推论3*) 具性质 $S \cdot u \in C_0^\infty$ 的分布 $u \in \mathcal{E}'$ 实际使 $u \in C_0^\infty$ 的充要条件是: $S \in \mathcal{E}'$ 且为可逆的.

这是引理5及定理3的显然结果.

引理7 对任意两个域 $\Omega_1, \Omega_2 \subset R^n$, 若 S 的伴算子 S^* 具性质: $S^* \cdot D'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$, 则由 $D(\Omega_2)$ 到 $D(\Omega_1)$ 的逆算子 S^{-1} 为序列连续的, 即: 由 $\varphi_j \rightarrow 0$ (在 $D(\Omega_2)$ 中), 有 $S^{-1}\varphi_j \rightarrow 0$ (在 $D(\Omega_1)$ 中).

证 设 K_2 为 Ω_2 中某紧集, 今证明: 存在紧集 $K_1 \subset \Omega_1$, 非负整数 k, N 及正数 C , 使

$$\left| \int f \varphi dx \right| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{K_1} |\partial^\alpha f| \|S \cdot \varphi\|_N,$$

$$\forall f \in \mathcal{E}(\Omega_1), \quad \varphi \in D(\Omega_2). \quad (14)$$

这里要求 $\text{supp } S \cdot \varphi \subset K_1$. 记这种 φ 的集为 Φ , 并用范 $\|S \cdot \varphi\|_N$ 确定其中拓扑. 显然, (14)的左边对 f 连续; 而据假定, 对固定的 $f \in \mathcal{E}(\Omega_1)$, 有 $u \in D'(\Omega_2)$ 使 $S^* \cdot u = f$, 故 $(f, \varphi) = (u, S \cdot \varphi)$, 而得对 φ 的连续性. 既然 (f, φ) 分别对 f 及 φ 连续, 据1.3.3定理11, 知定义于 $\mathcal{E} \times \Phi$ 上的双线性泛函 (f, φ) 为整体连

*) 见引理5足注.

续的, 故(14)成立, 且 Φ 中元 φ 的台含于 K_1 . 取 $f \in S$, 令

$$g = (1 - \Delta)^j f, \quad 2j > k + n + 1, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

作 F 变换得

$$\widehat{g}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^j \widehat{f}(\xi),$$

故每个 $g \in S$ 可表为 $(1 - \Delta)^j f$, 且 $f \in S$. 用 $\int |g| dx$ 估计

$|\widehat{g}(\xi)|$, 用 $\int \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) d\xi$ 估计 $|\partial^\alpha f|$, 可得估计式

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha f| \leq C \int |g| dx.$$

在(14)中换 φ 为 $(1 - \Delta)^j \varphi$ 得

$$\left| \int g \varphi dx \right| \leq C \int |g| dx \|S \cdot \varphi\|_{N+2j}, \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad g \in S.$$

这里 C 为另一常数(下同). 记 $N' = N + 2j$, 由上式知

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_0 &\leq C \|S \cdot \varphi\|_N, \\ \|\varphi\|_j &\leq C \|S \cdot \varphi\|_{N'+2j}, \end{aligned} \quad \forall \varphi \in \Phi, \quad j = 1, 2, \dots$$

这些不等式及 Φ 中元 φ 的台含于 K_1 一道正表明 S^{-1} 在 D 上为序列连续的.

引理8 S^{-1} 为序列连续算子的充要条件是: 1) 对每个紧集 $K_2 \subset \Omega_2$, 有紧集 $K_1 \subset \Omega_1$, 使由 $\varphi \in D(\Omega_1)$ 及 $\text{supp } S \cdot \varphi \subset K_2$ 推出 $\text{supp } \varphi \subset K_1$; 2) 对每个紧集 $K_1 \subset \Omega_1$, 存在常数 C 及 N , 使

$$\|\varphi\|_0 \leq C \|S \cdot \varphi\|_N, \quad \forall \varphi \in D(K_1). \quad (6)$$

证 若1)不成立, 则有一列 $\{\varphi_j\} \subset D(\Omega_1)$, 使 $\text{supp } S \cdot \varphi_j$ 含于 K_2 , 但所有 $\text{supp } \varphi_j$ 不同含于 Ω_1 的任何紧子集内. 取 $a_j > 0$

充分小, 使 $a_j S \cdot \varphi_j$ 的 j 阶以上导数的绝对值 $< \frac{1}{j}$, 这时 $S \cdot a_j \varphi_j$

$\rightarrow 0$ 而列 $\{a_j \varphi_j\}$ 不在 $D(\Omega_1)$ 中收敛 (因 $\text{supp } a_j \varphi_j$ 不同属于固定紧集). 同样, 若 2) 不成立, 可得类似的矛盾. 必要性得证.

至于充分性, 由引理 7 的证明知为显然的.

定义 2 开集对 (Ω_1, Ω_2) 若满足条件

$$\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$$

及引理 8 条件 1), 即称为 **S 凸** 的.

定理 4 $S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$ 的充要条件是: S^{-1} 为序列连续的.

证 必要性是显然的, 因由 $S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$ 知有 $S^* \cdot D'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$, 而据引理 7, 即得 S^{-1} 的序列连续性.

反之, 由 S^{-1} 的存在性及序列连续性, 知对任何 $f \in \mathcal{E}(\Omega_2)$ 及 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega_1)$, 由恒等式

$$(f, \varphi) = (S^{-1}f, \psi)$$

定义某个 $\psi \in \mathcal{E}'(\Omega_2)$. 今

$$(S \cdot u, \psi) = (S^{-1}S \cdot u, \varphi) = (u, \varphi),$$

故 $\varphi = S^* \cdot \psi$. 由此知 ψ 实际属于 $\mathcal{E}(\Omega_2)$. 因 φ 为 $\mathcal{E}(\Omega_1)$ 中任意元, 故 $S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$.

推论 4 定理 4 中的条件

$$S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1) \quad (15)$$

可换为等价的条件

$$S^* \cdot D'_F(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1), \quad (16)$$

或

$$S^* \cdot D'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1). \quad (17)$$

事实上, 显然有 $(15) \Rightarrow (16) \Rightarrow (17)$, 而由定理 4 知 $(17) \Rightarrow S^{-1}$ 的序列连续性, 后者正是 (15) 成立的充分条件.

定理5 由 $S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$ 知卷积方程(4)在 \mathcal{E}' 中可解, 随之除法问题(5)在 $\widehat{\mathcal{E}'}$ 中可解.

证 由(4)知对任一个 $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega_2)$, 等式

$$(f, \varphi) = (S^* u, \varphi) = (u, S^* \cdot \varphi)$$

定义 $S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2)$ 上的一个广函 u ; 既然 $\mathcal{E}(\Omega_1) = S^* \cdot \mathcal{E}(\Omega_2)$, 故 u 为 $\mathcal{E}(\Omega_1)$ 上广函, 且 $S^* u = f$, 即(4)可解. 由于 F 变换为 \mathcal{E}' 及 $\widehat{\mathcal{E}'}$ 间的拓扑同构, 故(5)也可解.

注3 本段标题是注所引文章中, 还讨论了其它空间的卷积方程的求解问题, 并阐述了域 Ω_1 及 Ω_2 的凸性结构关系; 这篇文章可作为以整函数相除的除法问题的总结.

关于以广函的除法问题, 除2.5.2注1中所提到 Malgrange 及 Ehrenpreis的工作外, 可参看;

S. Lojaciwicz, *Studia Math.* 18(1959)87—136

B. П. Паламолов, *ДАН*, 14(1961) 1302—1305; *Mat. Сб.* 60(1963) 270—292; *УМН*, 18:2(1963)164—167.

E. E. Rosinger, *Pacif. J. Math.*, 66(1976)257—263.

B. Gramsch, R. Wagner, *Manuscripta Math.* 21(1977) 25—42.

M. F. Atiyah, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970) 145—150.

2.6 流形上的分布

在本章最后, 简单地介绍一下流形上的分布.

2.6.1 定义

先回忆一下所谓流形, 指的是具无穷可微结构 (等价的

C^∞ 图集类)的有限维(n 维)、次紧、 T_2 拓扑空间 M ，其上 C^∞ 图集 \mathcal{A} 是细图 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 的集。由于次紧性， $\{U_i\}$ 可取为 M 的可列的、局部有限的开覆盖列。映射 $\varphi_i: U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset R^n$ 是同胚映射，且迭合映射

$$\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}: \varphi_k(U_j \cap U_k) \rightarrow \varphi_j(U_j \cap U_k): R^n \rightarrow R^n$$

为 C^∞ 微分同胚(所谓的相容性要求)。

在定义流形上的分布之前，先提一下分布的变量代换。设 $g: U \subset R^n \rightarrow V \subset R^n$ 为 C^∞ 微分同胚。通常函数 $\varphi(x)$ 的变量代换定义为 $g\varphi = \varphi \circ g^{-1}$ ，而分布 f 的变量代换则如下定义

$$(gf, \varphi) = (f, g^{-1}\varphi |\det g|) = (f, |\det g| \varphi \circ g). \quad (1)$$

设 $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ 为 M 上图集。 M 上的分布 f 由 R^n 中如下的分布列 $\{f_i\}$ 定义： $f_i \in D'(\varphi_i(U_i))$ 且微分同胚 $\varphi_j \circ \varphi_k^{-1}$ 以如下方式作用于 f_k ：

$$f_j = (\varphi_j \circ \varphi_k^{-1})f_k \quad (\text{在 } \varphi_j(U_k \cap U_j) \text{ 上}),$$

若 $\mathcal{B} = \{(V_i, \psi_i)\}$ 为 M 上等价于 \mathcal{A} 的另一图集，且 R^n 中分布列 $\{g_i\}$ 具性质

$$g_j = (\psi_j \circ \psi_i^{-1})f_i \quad (\text{在 } \psi_j(V_i \cap V_j) \text{ 上}),$$

则称 $\{g_i\}$ 与 $\{f_i\}$ 定义同一分布 $f \in D'(M)$ 。不难核验这个关系是一个等价关系。于是可理解 M 上的分布空间 $D'(M)$ 为 R^n 中分布列 $\{f_i\}$ 的等价类的空间。

类似地可定义向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 上的截面分布。设典型纤维 F 为有限维实向量空间 R^l 。对 M 上图集 $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ ，由 $(x, e_x) \rightarrow (\varphi_i(x), g_i(x)e_x)$ 确定的映射

$$\Phi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow \varphi_i(U_i) \times R^l$$

为 C^∞ 微分同胚；这里 e_x 为 $x \in M$ 处纤维上某元， $g_i(x)$ 为点 x 处纤维空间的某给定线性变换。

设 $f_i = \{f_{i1}, \dots, f_{il}\}$ 为 R^n 中开集 $\varphi_i(U_i)$ 内的通常分布

列,而使

$$f_j = (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(g_j \circ g_i^{-1} \cdot f_i) \quad (\text{在 } \varphi_j(U_i \cap U_j) \text{ 上}),$$

可看出 $(g_j \circ g_i^{-1})f_i$ 是 $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ 上的一组 l 个通常分布, 而 f_j 则是由它们经变换 $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ 得来的定义于 $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ 的一组 l 个通常分布.

向量丛 $\pi: E \rightarrow M$ 的**截面分布**定义为上述具 l 个分量的列 $\{f_j\}$ 的等价类. 等价关系和标量分布一样引进. 列 $\{f_j\}$ 称为分布 f 在细图 (U_i, φ_i) 中的**分量列**. 截面分布空间记作 $D'(M, E)$.

例1 对流形 M 的切丛 TM , 其上截面分布 v 在细图 (U, φ) 中有 n 个标量分布 v_1, \dots, v_n 作为其分量. v 关于另一细图 (U', φ') 的分量 v'_1, \dots, v'_n 与分量 v_1, \dots, v_n 之间存在关系

$$v_i = (\varphi \circ \varphi'^{-1}) \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} v'_j \right) \quad (\text{在 } U \cap U' \text{ 中}),$$

x 及 x' 分别是 U 及 U' 中的局部坐标.

2.6.2 流形上的积分

为了深入理解流形 M 上检试函数空间的对偶空间, 须先定义流形上的积分.

对于具紧台的连续函数 $f: R^n \rightarrow R$, 在经典分析中理解定积分 $\int f(x) dx$ 为含 $\text{supp} f$ 的任一矩块上的 Riemann 积分, 且其值与所选矩块无关.

定义1 设 U 为 R^n 中开集, $\omega \in \Omega^n(U)$ 且具紧台. 若关于 R^n 中标准基底有

$$\begin{aligned} \omega(u) &= \omega_{i_1 \dots i_n}(u) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n} \\ &= n! \omega_{1 \dots n}(u) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n; \end{aligned}$$

$$\omega_{i_1, \dots, i_n}(u) = \omega(u)(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}), \quad \forall u \in U.$$

(e_1, \dots, e_n) 为标准基底, 于是定义 ω 沿 U 的积分为

$$\int_U \omega = n! \int_U \omega_{1 \dots n}(u) dx_1 \cdots dx_n.$$

为推广积分定义于流形, 须建立变量代换法则, 为此引进如下概念.

定义2 设 M 及 N 都是 n 维可定向流形, 分别具体元 Ω_M 及 Ω_N . 若映射 $f: M \rightarrow N$ 属 C^∞ , 则使

$$f^* \Omega_N = (\det(\alpha_M, \alpha_N) f) \Omega_M$$

成立的唯一 C^∞ 函数 $\det(\alpha_M, \alpha_N) f \in \mathcal{F}(M)$ 称为 f (关于 Ω_M 及 Ω_N) 的行列式. 若 $f: M \rightarrow M$, 则简记这个行列式为 $\det_{\Omega_M} f$.

定理1 设 U 及 V 为 R^n 中开集, $f: U \rightarrow V$ 为保向微分同胚 (保向性指 $f^*(\Omega_N) \in [\Omega_M]$). 若 $\omega \in \Omega^n(V)$ 且具紧台, 则拖射 f^* 的象 $f^*\omega \in \Omega^n(U)$ 也具紧台, 且

$$\int_U f^* \omega = \int_V \omega.$$

证 若 $\omega = n! \omega_{1 \dots n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 据定义2有

$$f^* \omega = n! (\omega_{1 \dots n} \circ f) (\det_{\Omega_0} f) \Omega_0,$$

$$\Omega_0 \equiv dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

因 f 为微分同胚, 故 $f^*\omega$ 也具紧台. 于是

$$\int f^* \omega = n! \int (\omega_{1 \dots n} \circ f) (\det_{\Omega_0} f) dx_1 \cdots dx_n.$$

由保向性知 $\det_{\Omega_0} f > 0$. 用有限个球覆盖 $\text{supp } \omega$, 可应用通常的积分变量变换公式:

$$\int \omega_{1 \dots n} dx_1 \cdots dx_n = \int (\omega_{1 \dots n} \circ f) (\det_{\Omega_0} f) dx_1 \cdots dx_n.$$

这表明 $\int f^* \omega = \int \omega$.

定义3 设 M 为 n 维流形, 且具定向 $[\Omega]$. 若 $\omega \in \Omega^n(M)$ 且具紧台 $K \subset U$, 而 (U, φ) 为正定向细图, 即 $\varphi_*(\Omega|_U)$ 等价于标准体元 Ω_0 , 则可定义 ω 在流形上的(局部)积分为

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{U'} \varphi_*(\omega|_U), \\ U' = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n.$$

定理2 设 $\omega \in \Omega^n(M)$, 且紧台 $\text{supp } \omega = K \subset U \cap V$, (U, φ) 及 (V, ψ) 为 M 上二正定向细图, 则有

$$\int_{(\varphi)} \omega = \int_{(\psi)} \omega.$$

证 取 $f = \varphi \circ \psi^{-1}: V \rightarrow U$, 则 $f^* = (\varphi \circ \psi^{-1})^* = (\psi \circ \varphi^{-1})^*$. 由定理1有

$$\int \varphi_*(\omega|_U) = \int (\psi \circ \varphi^{-1})_* \varphi_*(\omega|_U) = \int \psi_* \omega,$$

据定义3知定理成立.

这个定理表明 $\int \omega$ 的定义与正定向细图的选择无关.

定义4 设 M 为定向流形, \mathcal{A} 为由正定向细图组成的图集, $P = \{(U_i, \varphi_i, g_i)\}$ 为相应的单位分解, 定义 ω 沿 M 的(全局)积分为

$$\int_P \omega = \sum_i \int_{(\varphi_i)} \omega_i, \quad \omega_i = g_i \omega. \quad (2)$$

定理3 1) (2)右边的和仅含有限个项;

2) 对任何其它正定向细图图集及相应单位分解 $Q = \{(V_i, \psi_i, h_i)\}$, 有公同的值

$$\int_P \omega = \int_Q \omega.$$

这个值称为 ω 沿流形 M 的定积分, 记作 $\int \omega$.

证 对任一点 $m \in M$, 存在邻域 U , 使只有有限个 g_i 在 U 上不为零. 因 $\text{supp } \omega$ 为紧集, 可由有限个这种邻域覆盖, 故(2)的右边的和中只有有限个项不为零. 1)得证. 为证明2), 注意函数列 $\{g_i h_j\}$ 具性质: 对所有的点 $m \in M$, 除有限个指标组合 (i, j) 外, $g_i h_j(m) = 0$, 且 $\sum_{i,j} g_i h_j = 1$. 于是得

$$\int_P \omega = \sum_i \int g_i \omega = \sum_{i,j} h_j g_i \omega \sum_j \int h_j \omega = \int_Q \omega.$$

定理4 设 M 及 N 都是 n 维定向流形, $f: M \rightarrow N$ 为保向的微分同胚. 若 $\omega \in \Omega^n(N)$ 具紧台, 则 $f^* \omega$ 亦然, 且有等式

$$\int \omega = \int f^* \omega.$$

证 因 $\text{supp } f^* \omega = f^{-1}(\text{supp } \omega)$, 故为紧集. 设 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ 为正定向细图图集, $P = \{g_i\}$ 为相应的单位分解, 则 $\{(f(U_i), \varphi_i \circ f^{-1})\}$ 为 N 上正定向细图图集, $Q = \{g_i \circ f^{-1}\}$ 为相应的单位分解. 于是有

$$\begin{aligned} \int f^* \omega &= \sum_i \int_{(U_i)} g_i f^* \omega = \sum_i \int \varphi_i \cdot (g_i f^* \omega) \\ &= \sum_i \int \varphi_i \cdot (f^{-1})_* [(g_i \circ f^{-1}) \omega] \\ &= \sum_i \int (\varphi_i \circ f^{-1}) \cdot (g_i \circ f^{-1}) \omega \\ &= \sum_i \int \psi_i \cdot h_i \omega = \int_Q \omega = \int \omega, \end{aligned}$$

这里用到关系 $f^* = (f^{-1})_*$.

定义5 设 M 为可定向流形, Ω 为其上某个体元, $f \in \mathcal{F}(M)$ 且具紧台, 可定义 f 关于 Ω 的积分为

$$\int_{\Omega} f = \int f \Omega.$$

2.6.3 张量分布

有一种等价定义, 把 $D'(M)$ 作为流形 M 上具紧台的 C^∞ 函数空间 $D(M)$ 的对偶空间; 把 $D'(M, E)$ 作为 E 的在 M 中具紧台的 C^∞ 截面空间 $D(M, E)$ 的对偶空间, 而不是如2.6.1中那样用分布的局部表示列. 利用对偶性, 特别还可定义具给定类型的张量分布的空间. 为此先赋予流形 M 一个 C^∞ Riemann 度量 $h \in \mathcal{F}_2^0(M)$, 即: h 为二级共变张量, 且对任一点 $m \in M$, 它是对称及正定的. 空间 $D(M, E)$ 及 $D'(M, E)$ 应不依赖于 h 的选择. 利用这个 Riemann 度量, 可引进半范列, 但涉及共变导数. 设 M 上曲线 $C(s) = (C_1(s), \dots, C_n(s))$ 过点 $x = C(s_1)$ 及点 $y = C(s_2)$. 记 $\tau(s_2, s_1)t$ 为张量 t 沿曲线 C 由 x 移到 y 所得值, 则 t 沿 C 在点 x 的共变导数定义为

$$\nabla t = \lim_{s_2 \rightarrow s_1} \frac{\tau(s_2, s_1)t(x) - t(x)}{s_2 - s_1},$$

$\binom{r}{s}$ 型张量 t 在点 x 关于度量 h 的长度 $|t(x)|$ 定义为(用哑指标作和记法)

$$|t(x)| = |t^{i_1 \dots i_r}(x) t_{i_1 \dots i_s}(x)|^{\frac{1}{2}}, \quad k = r + s,$$

t 的分量的指标可通过度量 h 上提或下落, 例如:

$$t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} t^{i_{r+1}}_{j_{s+1}} = t^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} h^{j_{s+1} i_{r+1}},$$

$$t_{j_1, \dots, j_s, j_{s+1}}^{i_1, \dots, i_{r-1}} = t_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} h_{i_r j_{s+1}}.$$

这里 $\{h^{ij}\}$ 为基本度量 $h = \{h_{ij}\}$ 的逆

$$h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k,$$

由于 h 的正定性及对称性，逆 $h^{-1} = \{h^{ij}\}$ 存在。

于是可对 M 上 C^∞ 张量 t 引进半范列：

$$p_{K-m}(t) = \sum_{\alpha \leq m} \sup_K |\nabla^\alpha t(x)|, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

K 为 M 上任一紧集。故 M 上所有无穷可微的 k 级张量作成 一个 Fréchet 空间，记作 $\mathcal{S}(M, \otimes^k)$ 。类似地可定义具紧台 K 的 k 级 C^∞ 张量的 F 空间 $D(K, \otimes^k)$ 及其并 LF 空间 $D(M, \otimes^k)$ 。

M 上的 k 级张量分布空间 $D'(M, \otimes^k)$ 定义为 $D(M, \otimes^k)$ 的对偶空间。例如，局部 L 可积的张量 $T(x)$ 可作为正则的张量分布，而如下作用于 $D(M, \otimes^k)$ 中的张量 t ：

$$\langle T, t \rangle = \int_M (T(x), t(x)) \eta_h,$$

其中 $(T(x), t(x))$ 为张量内积 $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} t_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ ，而 η_h 则为 M 关于 Riemann 度量 h 的体元

$$\eta_h = \sqrt{|\bar{h}(x)|} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

$D'(M, \otimes^k)$ 中拓扑也可由如下的半范族确定

$$p_t(T) = |\langle T, t \rangle|, \quad t \in D(M, \otimes^k)$$

可定义 k 级张量分布 T 的共变导数为 $k+1$ 级张量分布 ∇T

$$\langle \nabla T, t \rangle = -\langle T, h \cdot \nabla t \rangle,$$

其中 $h \cdot \nabla t$ 为张量 t 的缩积，在局部坐标下为

$$(h \cdot \nabla t)^{i_1, \dots, i_k} = \nabla_j t^{j, i_1, \dots, i_k},$$

∇_j 为沿第 j 个坐标的共变微分算子。

2.6.4 流与密度

斜对称的张量分布称为流 (current), 这个张量的级 k 称为流的次数 (degree), 而 $n-k$ 则称为这个流的维数. 例如, k 型式 $\omega \in \Omega^k(M)$ 如下确定一个 k 次 ($n-k$ 维) 的流

$$\langle \omega, \theta \rangle = \int_M \omega \wedge \theta, \quad \forall \theta \in D(M, \otimes^{n-k}).$$

零次流正是标量分布 $f \in D'(M)$, 而扩张了零型式概念, 扩张 n 型式的流称为密度, 它和测度 (体元) 一样变换

$$a'(x') dx'_1 \cdots dx'_n = a(x) \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| dx_1 \cdots dx_n.$$

这里 x 及 x' 是迭合覆盖 $U \cap V$ 中的两组局部坐标, $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ 为变换

的 Jacobi 行列式的绝对值. 一般地说, M 上的 α 阶密度是在局部坐标下服从如下变换规律的 n 次流

$$a'(x) dx'_1 \cdots dx'_n = a(x) \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^\alpha dx_1 \cdots dx_n.$$

α 阶密度也可看作 M 上一维丛 (线丛) Ω_α 的截面, 这线丛由迁移函数 $\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$ 所确定.

例2 设 S 为 R^n 中 $n-1$ 维子流形. 若 S 由方程 $x_1 = 0$ 确定, 则 S 上的 Dirac 测度 δ_S 如下定义

$$(\delta_S, \varphi) = \int \varphi(0, x_2, \cdots, x_n) dx_2 \cdots dx_n.$$

若 S 由无临界点的 C^1 函数 $f(x) = 0$ 确定, 则 δ_S 定义为

$$(\delta_S, \varphi) = \int_S \varphi \omega,$$

ω 为 S 的 Leray 型式, 而由下式确定:

$$df \wedge \omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

因 f 无临界点, 在 S 上每点的邻域中, ω 可表为下列等价表示之一,

$$\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^{-1} dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n;$$

.....

$$\omega = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1};$$

故 δ_S 是 S 上的密度.

最后提一下流形上的线性微分算子. 作用于 M 上 k 级张量分布 T 的 m 阶线性微分算子 L 是线性映射

$$L: D'(M, \otimes^k) \rightarrow D'(M, \otimes^q).$$

L 的具体表示是

$$L: T \rightarrow \sum_{i \leq m} a_i \nabla^i T.$$

其中 a_i 是 M 上向量丛的 C^∞ 截口, 这向量丛在点 x 的纤维是线性映射空间

$$\mathcal{L}([\otimes T_x(M)]^{k+m}, [\otimes T_x(M)]^q).$$

这里 $[\otimes T_x(M)]^j$ 表示 j 个切空间 $T_x M$ 的张量积.

例3 Lie导数

$$V \rightarrow \mathcal{L}(V)h; \quad D'(M, \otimes^1) \rightarrow D'(M, \otimes^2)$$

在局部坐标下定义为(h 为 M 上Riemann度量)

$$(\mathcal{L}(V)h)_{ij} = \nabla_i V_j + \nabla_j V_i,$$

V 为向量, 足标表示分量编号.

例4 外导数

$$d: \omega \rightarrow d\omega; \quad (d\omega)_{i_1, \dots, i_j} = (-1)^{k-1} \nabla_{i_k} \omega_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_j}.$$

本节取材于Y. Choquet-Bruhat et al., *Analysis, Manifolds and Physics*, IVB1, VIB8., North-Holland, Amsterdam, 1977.

本章主要参考书

A. Friedman, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1963, Chap.1—4.

И. М. Гельфанд и Г. Е. Шиллов, *Обобщенные Функции*, 2, Гос. Изд., Москва, 1968. Гл. I — II.

L. Schwartz, *Théorie des Distributions* I, I, Hermann, Paris, 1950/51; 2nd ed., 1966.

F. Trèves, *Topological Vector Spaces Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1969.

3. 拟微分算子

从历史的角度看, 拟微分算子是奇异积分算子与近代Fourier分析相结合的产物. 虽然早在三十年代由于研究椭圆型偏微分算子的边值问题已导致奇异积分算子理论的深入研究, 但拟微分算子概念的正式提出及其理论的系统建立, 则是六十年中期才开始的.

从逻辑的角度看, 拟微分算子也可以看作是线性偏微分算子的推广, 是微分算子与积分算子在更高层次上的统一. 这种推广和统一的关键在于线性偏微分算子的Fourier表示.

设域 $X \subset R^n$. 考虑 X 上的线性偏微分算子

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad a_\alpha(x) \in C^\infty(X). \quad (1)$$

记 $u(x) \in C_0^\infty(X)$ 的Fourier变换为 $\widehat{u}(\xi)$, 由反转公式有,

$$u(x) = \int \widehat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad d\xi = (2\pi)^{-n} d\xi, \quad (2)$$

于是可得算子 $P(x, D)$ 的Fourier表示

$$P(x, D)u = \int e^{ix \cdot \xi} P(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad (3)$$

$$\text{或} \quad P(x, D)u = \iint e^{i(x-y) \cdot \xi} P(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (3')$$

其中

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

称为算子 $P(x, D)$ 的特征或全特征, 而

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

则称为算子 P 的主特征。它们在线性偏微分算子理论中起着十分重要的作用。特别, 算子 P 的转置算子 tP 、伴算子 P^* 以及两个算子 $P(x, D)$ 及 $Q(x, D)$ 的合成算子 $P \circ Q$, 都可通过特征的简单运算来表达。

所谓拟微分算子, 就其实质而言, 是将式(3)或(3')中关于 ξ 的多项式 $P(x, \xi)$ 推广到更广泛的一类函数时所得的一类算子。

这种推广当然不是漫无边际的。一方面, 它必须保持线性偏微分算子的某些重要性质, 例如, 关于转置、伴随及合成等运算应当是封闭的, 特别应能定义拟微分算子的特征, 而且上述几种运算可通过特征的运算来实现; 另一方面, 为了研究的需要, 应期望尽可能多的线性偏微分算子的“逆算子”(如果存在) 包含在推广后的算子类中。这两方面的要求是相互限制的。由于侧重面的不同, 引出不同类型的拟微分算子, 而表现于把关于 ξ 的多项式类 $P(x, \xi)$ 推广到怎样的函数类。

本章主要介绍 L. Hörmander 所引进的拟微分算子类 $L_{p, \delta}^m(X)$, 其特征属于函数类 $S_{p, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_n)$, 确切含义将在以后给出。从现有的各类拟微分算子看, 上述两方面的要求在类 $L_{p, \delta}^m(X)$ 中得到比较均衡的满足。因此, 掌握本章的内容, 将有助于研究更复杂或更特殊的拟微分算子类。

拟微分算子的出现, 为研究一般线性偏微分算子提供了一个有力和方便的工具, 在其本身的研究中也产生了许多有独立意义的新课题。但在处理像波动方程一类方程的有关问题时, 它的作用受到了限制。为了解决这个困难, Hörmander 于七十年代初引进 Fourier 积分算子并作了系统研究。粗略地说,

Fourier积分算子是在拟微分算子的基础上,又把式(3)或(3')中的 $i(x, \xi)$ 或 $i(x-y, \xi)$ 推广到某类函数 $i\varphi(x, \xi)$ 或 $i\varphi(x, y, \xi)$ 而得的一类算子。因此,拟微分算子是Fourier积分算子的特殊情形。

基于Fourier积分算子的重要性以及它与拟微分算子的密切关系,本章将先简要地介绍Fourier积分算子的概念及其局部理论,然后引出拟微分算子。

3.1 振荡积分

3.1.1 函数类 $S_{\rho, \delta}^m$

定义1 设域 $X \subset \mathbb{R}^n$, m, ρ, δ 都是实数,且 $0 \leq \rho, \delta \leq 1$. 用 $S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$ 记所有具如下性质的函数 $a(x, \theta)$ 的集合: $a(x, \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_N)$, 并且对任二指标组 α, β 及任意紧集 $K \subset X$, 存在常数 $C_{\alpha, \beta, K} > 0$, 使下列估式成立:

$$|\partial_\theta^\alpha \partial_x^\beta a(x, \theta)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \quad (1) \\ \forall (x, \theta) \in K \times \mathbb{R}_N$$

注1 若存在某常数 $r_0 > 0$, 使(1)仅对满足 $x \in K$ 且 $|\theta| \geq r_0$ 的 (x, θ) 成立, 则称 a 关于大的 $|\theta|$ 属于 $S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$.

注2 若有含参变量 $\tau \in T \subset \mathbb{R}^1$ 的一族函数 $a_\tau(x, \theta) \in S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$, 且对于此族中的所有 a_τ , 式(1)中的 $C_{\alpha, \beta, K}$ 可取得与 τ 无关, 则称 $a_\tau(x, \theta)$ 关于 $\tau \in T$ 一致地属于 $S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$. 类似地可定义 a_τ 关于大的 $|\theta|$ 一致地属于 $S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$.

今后在不致引起混淆时, 把 $S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_N)$ 简记为 $S_{\rho, \delta}^m$, 并约定

$$S_{\rho, \delta}^{+\infty} = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho, \delta}^m;$$

$$S_{\rho, \delta}^{-\infty} = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho, \delta}^m;$$

$$S^m = S_{1, 0}^m.$$

容易核验 $S_{\rho, \delta}^m$ 的下列性质:

1) 若 $m \leq m'$, $\rho \geq \rho'$, $\delta \leq \delta'$, 则

$$S_{\rho, \delta}^m \subset S_{\rho', \delta'}^{m'}.$$

2) 若 $a \in S_{\rho, \delta}^m$, $b \in S_{\rho', \delta'}^{m'}$, 则

$$ab \in S_{\rho, \delta}^{m+m'},$$

$$a+b \in S_{\rho, \delta}^{m''}, \quad m'' = \max(m, m').$$

3) 若 $a \in S_{\rho, \delta}^m$, 则 $D_\theta^\alpha D_x^\beta a \in S_{\rho, \delta}^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$.

例1 设 m 为非负整数, $a_\alpha(x) \in C^\infty(X)$, $|\alpha| \leq m$, 则

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \theta^\alpha \in S^m(X \times \mathbb{R}_N).$$

例2 设 $m \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}_N$, 则

$$\langle \theta \rangle^m = (\sqrt{1 + |\theta|^2})^m \in S^m(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_N).$$

例3 设 $f(x, \theta) \in C^\infty[X \times (\mathbb{R}_N \setminus 0)]$, f 关于 θ 为正齐 m 次的, 即: 对每个 $t > 0$ 及 $(x, \theta) \in X \times \mathbb{R}_N$, 有

$$f(x, t\theta) = t^m f(x, \theta),$$

则关于大的 $|\theta|$, 有 $f \in S^m$; 若 $f \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_N)$, 且关于大的 $|\theta|$ 是 θ 的正齐 m 次函数, 即存在常数 $r > 0$, 当 $x \in X$, $\theta \in \mathbb{R}_N$, $t|\theta| > r$ 时, 有

$$f(x, t\theta) = t^m f(x, \theta), \quad t > 0,$$

则 $f \in S^m$.

例2可由数学归纳法建立估式(1)而获证。下面给出例3的后半部证明。记

$$\omega_r = \{\theta: |\theta| < r, \theta \in \mathbb{R}_N\}, \quad S_r = \partial\omega_r,$$

对每个紧集 $K \subset X$, 当 $(x, \theta) \in K \times (\mathbb{R}_N \setminus \omega_r)$ 且 $t|\theta| \geq r$ 时,

应有

$$(D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f)(x, t\theta) = t^{m-|\alpha|} D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x, \theta).$$

特别取 $t = \frac{r}{|\theta|}$, 可得

$$\begin{aligned} |D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x, \theta)| &= \left(\frac{|\theta|}{r}\right)^{m-|\alpha|} |(D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f)\left(x, \frac{r\theta}{|\theta|}\right)| \\ &\leq \frac{1}{r^{m-|\alpha|}} (1 + |\theta|)^{m-|\alpha|} \sup_{K \times S_r} |D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x, \theta)| \\ &= C'_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|)^{m-|\alpha|}. \end{aligned}$$

记 $C''_{\alpha, \beta, K} = \sup_{K \times \omega_r} \frac{|D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x, \theta)|}{(1 + |\theta|)^{m-|\alpha|}}$, 令 $C_{\alpha, \beta, K} = \max(C', C'')$,

则当 $(x, \theta) \in X \times \mathbf{R}_N$ 时, 有

$$|D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} f(x, \theta)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\theta|)^{m-|\alpha|},$$

故 $f \in S^m$.

例4 设 $f(\theta) \in C_0^{\infty}(\mathbf{R}_N)$, 且当 $|\theta| \leq \frac{1}{2}$ 时为1, 当 $|\theta| \geq 1$ 时

为零. 对 $a(x, \theta) \in S_{p, \delta}^m(X \times \mathbf{R}_N)$, 记

$$b_{\varepsilon}(x, \theta) = f(\varepsilon\theta) a(x, \theta),$$

则 $b_{\varepsilon}(x, \theta)$ 关于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 一致地属于 $S_{p, \delta}^m(X \times \mathbf{R}_N)$.

事实上, 记 $f_{\varepsilon}(\theta) = f(\varepsilon\theta)$. 由于 $f(\theta) \in S^0(X \times \mathbf{R}_N)$, 有

$$\begin{aligned} |D_{\theta}^{\alpha} f_{\varepsilon}(\theta)| &= \varepsilon^{-|\alpha|} |(D_{\theta}^{\alpha} f)(\varepsilon\theta)| \leq \varepsilon^{-|\alpha|} (1 + |\varepsilon\theta|)^{-|\alpha|} \\ &\leq C_{\alpha} (1 + |\theta|)^{-|\alpha|}, \end{aligned}$$

其中 C_{α} 与 ε 无关, 故 $f_{\varepsilon}(\theta)$ 关于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 一致地属于 $S^0(X \times \mathbf{R}_N)$. 又因 $a \in S_{p, \delta}^m(X \times \mathbf{R}_N)$ 且 a 不依赖于 ε , 据性质1)及2)知 $b_{\varepsilon} = f_{\varepsilon} a$ 关于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 一致地属于 $S_{p, \delta}^m(X \times \mathbf{R}_N)$.

顺便指出, 虽然对每个 $\varepsilon \in (0, 1)$ 有 $b_{\varepsilon} \in S^{-\infty}$, 但是并非一致地属于 $S^{-\infty}$, 甚至并非一致地属于 $S_{p, \delta}^{m'}(m' < m)$.

3.1.2 振荡积分及其正规化

定义2 设实值函数 $\varphi(x, \theta) \in C^\infty(X \times (\mathbb{R}_N \setminus 0))$, 关于 θ 为正齐一次, 且当 $\theta \neq 0$ 时无临界点, 即:

$$\varphi'_{x, \theta} \equiv (\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}, \varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq (0, \dots, 0), \quad \theta \neq 0,$$

则称 φ 为**位相函数**, 简称为**位相**(phase).

定义3 若 $a(x, \theta) \in S^m_{p, \varphi}(X \times \mathbb{R}_N)$, $\varphi(x, \theta)$ 为位相, 则称积分

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) u(x) d\theta, \quad u \in C_0^\infty(X) \quad (2)$$

为**振荡积分**, 称 a 为其**振幅**, φ 为其**位相**.

注意式(2)在通常意义下可能是发散积分. 下面通过正规化来赋予它一种确切的意义. 为此, 先证明下面的引理.

引理1 设 $\varphi(x, \theta)$ 是定义于 $X \times \mathbb{R}_N$ 的位相函数, 则存在一阶线性微分算子

$$L = \sum_{j=1}^N a_j(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n b_k(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x_k} + c(x, \theta)$$

满足条件:

- 1) $a_j \in S^0$, $j=1, \dots, N$; $b_k \in S^{-1}$, $k=1, \dots, n$; $c \in S^{-1}$;
- 2) 若定义 L 的转置算子 tL 如下:

$${}^tLu = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial \theta_j} (a_j u) - \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} (b_k u) + cu,$$

则有

$${}^tLe^{i\varphi} = e^{i\varphi}.$$

证 首先注意, 若 ${}^tL = M$, 则 ${}^tM = L$; 反之亦然. 其次,

若 L 的系数满足条件1), 则把 tL 改写为通常的标准形式后, 其系数也满足条件1); 反之亦然. 故若能求得某个一阶算子 M , 满足条件1)及关系 $Me^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, 则 $L = {}^tM$ 即为所求.

M 可如下求得. 由

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} e^{i\varphi} = i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} e^{i\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k} e^{i\varphi} = i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} e^{i\varphi},$$

有

$$\begin{aligned} & - \left(\sum_{j=1}^N i \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} |\theta|^2 \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) e^{i\varphi} \\ & = \left(\sum_{j=1}^N |\theta|^2 \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \right|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right|^2 \right) e^{i\varphi} = \frac{1}{\psi} e^{i\varphi}, \end{aligned}$$

其中 ψ 即由最后的恒等式定义. 由位相函数的定义知 $\psi \in C^\infty(X \times (\mathbf{R}_N \setminus 0))$ 且关于 θ 是正齐-2次的, 故当 $\theta \neq 0$ 时得

$$-i\psi \left(\sum_{j=1}^N |\theta|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$$

剩下只须消去上式左边系数的奇性. 为此取

$$\tau(\theta) \in C_0^\infty(\mathbf{R}_N), \quad \tau(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |\theta| \leq \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{当 } |\theta| > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

令

$$\begin{aligned} M = & \sum_{j=1}^N -i(1-\tau)\psi |\theta|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \\ & + \sum_{k=1}^n -i(1-\tau)\psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} + \tau, \end{aligned}$$

显然有 $M e^{i\varphi} = e^{i\varphi}$, 且 M 的系数满足要求 1). 试以 $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ 的系数为例, 进行验证. 易知 $\psi, |\theta|^2, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}$ 分别是 θ 的正齐 $-2, 2, 0$ 次函数, 故其乘积为正齐零次的, 于是 $-i(1-\tau)\psi|\theta|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}$ 关于大的 $|\theta|$ 为正齐零次函数, 且在 $X \times \mathbf{R}_N$ 上无穷可微, 由 3.1.1 例 3 知它属于 S^0 .

注 3 若 $\varphi'_\theta = (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_N}) \neq 0$, 则可取

$$M = \sum_{j=1}^N -i(1-\tau)\psi|\theta|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j} \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \tau,$$

这时 $L = {}^t M$ 中的系数 $b_k \equiv 0, k = 1, \dots, n$.

下面应用引理 1 对 (2) 进行正规化. 今后总是假定 $\rho > 0, \delta < 1$.

先作如下的考虑: 当 $m < -N$ 时, 积分 (2) 在通常意义下绝对收敛, 并可分部积分. 把 $e^{i\varphi} = {}^t L e^{i\varphi}$ 代入, 进行分部积分, 并重复这种运算 l 次, 可得

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi} L^l(au) dx d\theta. \quad (2')$$

当 $m \geq -N$ 时, 虽然 (2) 在通常意义下不一定收敛, 从而一般不能转化为 (2'). 但容易看出当 $l \geq \frac{m+N}{s} + 1$ 时, $s = \min(\rho, 1-\delta)$, 有

$$L^l(au) \in S_{\rho, \delta}^{m-ls} \subset S_{\rho, \delta}^{-N-1},$$

由此知 (2') 的右边就其本身而言是绝对收敛的. 于是可把这个积分定义为形式积分 (2) 的正规化. 为了说明这种正规化定义

的合理性, 必须证明当 $l \geq \frac{m+N}{s} + 1$ 时, 由(2')右边给出的积

分值不依赖于算子 L 及数 l 的选择. 下面就来证明这一点. 为此, 取 $\tau_\varepsilon(\theta) = \tau(\varepsilon\theta)$, 而 τ 为 3.1.1 例 4 中的 f ; $\varepsilon \in (0, 1)$. 记

$$I_{\varphi, \varepsilon}(au) = \iint e^{i\varphi(x-\theta)} \tau_\varepsilon(\theta) a(x, \theta) u(x) dx d\theta, \\ u \in C_0^\infty(X).$$

由例 4 知 $\tau_\varepsilon au$ 关于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 一致地属于 $S_{\rho, s}^m$, 故当 L 满足引理 1 的条件时, 知 $L^l(\tau_\varepsilon au)$ 关于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 一致地属于 $S_{\rho, s}^{m-l}$, $s = \min(\rho, 1-\delta)$. 因此, 当 $l \geq \frac{m+N}{s} + 1$ 时,

$$|e^{i\varphi} L^l(\tau_\varepsilon au)| \leq C_K (1+|\theta|)^{-N-1}, \quad K = \operatorname{supp} u$$

且 C_K 为不依赖于 (ε, x, θ) 的正数. 于是由实变数函数论中的 Lebesgue 控制收敛定理可得:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varphi, \varepsilon}(au) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i\varphi} L^l(\tau_\varepsilon au) dx d\theta \\ = \iint e^{i\varphi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L^l(\tau_\varepsilon au) dx d\theta = \iint e^{i\varphi} L^l(au) dx d\theta,$$

即

$$\iint e^{i\varphi} L^l(au) dx d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i\varphi} \tau_\varepsilon au dx d\theta \quad (3)$$

上式右边既不含 L , 也不含 l , 故左边的值实际上不依赖于 L 及 l .

因此, 可以合理地把式(2')右边定义为振荡积分(2)的正规化. 今后凡遇到振荡积分, 总理解为它的正规化.

注 4 也可把(3)的右边定义为振荡积分(2)的正规化. 由于式(3)的左边不依赖于 τ , 故其右边亦然. 所以, 这样定义的正规化不依赖于 τ 的选取. 式(3)还表明, 这两种正规化定义是完全一致的. 今后将根据不同的需要而选用其中的一种.

3.1.3 由振荡积分定义的广函

结合式(2)中的位相 φ ，引进重要点集

$$C_\varphi \equiv \{(x, \theta); x \in X, \theta \in \mathbb{R}_N \setminus 0, \varphi_{\theta_j} = 0, j = 1, \dots, N\}, \quad (4)$$

由于 φ_{θ_j} 关于 θ 是正齐零次的，故 C_φ 是 $X \times (\mathbb{R}_N \setminus 0)$ 中的锥形集，

即：若 $(x_0, \theta_0) \in C_\varphi$ ，则对所有的 $t > 0$ ，也有 $(x_0, t\theta_0) \in C_\varphi$ 。
还可看出， C_φ 是闭集。

记 π 为自然投影。

$$\pi: X \times (\mathbb{R}_N \setminus 0) \rightarrow X,$$

即若 $(x, \theta) \in X \times (\mathbb{R}_N \setminus 0)$ ，则 $\pi(x, \theta) = x$ 。记

$$S_\varphi = \pi C_\varphi; R_\varphi = X \setminus S_\varphi.$$

命题1 对固定的位相 φ 及振幅 a ，由振荡积分所定义的泛函 A

$$(A, u) = I_\varphi(au), \quad \forall u \in \mathcal{D}(X) \quad (5)$$

属于 $\mathcal{D}'(X)$ 。

证 设函数列 $\{u_j(x)\} \subset \mathcal{D}(X)$ 且在其中收敛于零。据2.3.1中定义，知存在紧集 $K_0 \subset X$ ，使 $\text{supp } u_j \subset K_0$ ， $j = 1, 2, \dots$ ，且 u_j 的各阶导数当 $j \rightarrow \infty$ 时在 K_0 上一致地趋于零。仿照3.1.2中关于正规化的讨论，知 $L^1(a(x, \theta)u_j(x))$ 关于 j 一致地属于 $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1}$ ，且当 l 充分大时，有

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} (A, u_j) &= \lim_{j \rightarrow \infty} \iint e^{i\varphi(x, \theta)} L^1(au_j) dx d\theta \\ &= \iint e^{i\varphi(x, \theta)} L^1[a(x, \theta) \lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x)] dx d\theta = 0, \end{aligned}$$

故 $A \in \mathcal{D}'(X)$ 。

下面揭示广函 A 的一些性质。

定理1 $\text{sing supp } A \subset S_\varphi$

或等价地表述为

$$A \in C^\infty(R_\varphi). \quad (6)$$

证 只须证存在函数 $A(x) \in C^\infty(R_\varphi)$, 使

$$I_\varphi(au) = \int A(x)u(x)dx, \quad \forall u \in C_0^\infty(R_+). \quad (7)$$

据注3知, 当 $(x, \theta) \in R_\varphi$ 时, 可取 L_θ 不含 ∂_x , 故

$$I_\varphi(au) = \iint e^{i\varphi(x, \theta)} [L_\theta^1 a(x, \theta)] u(x) d\theta,$$

记

$$A(x) = \int e^{i\varphi(x, \theta)} L_\theta^1 a(x, \theta) d\theta,$$

即有表示式(7). 今证明 $A(x) \in C^\infty(R_\varphi)$, 为此只须证: 对 R_φ 的每个有界的开子集 Ω , 有

$$A(x) \in C^\infty(\Omega), \quad (8)$$

记

$$A_\alpha(x) = \int D_x^\alpha [e^{i\varphi(x, \theta)} L_\theta^1 a(x, \theta)] d\theta. \quad (9)$$

今证上式右边的积分关于参变量 $x \in \Omega$ 一致地绝对收敛. 事实上, 用数学归纳法容易建立如下的估计式

$$|D_x^\beta e^{i\varphi(x, \theta)}| \leq C_\beta (1 + |\theta|)^{|\beta|}, \quad (x, \theta) \in \Omega \times R_N \setminus 0, \quad (10)$$

其中常数 C_β 只与 Ω 有关, 而与 x 无关.

注意到 $L_\theta^1 a \in S_{p, \frac{m-1}{s}}^{m-1}$, 应用 Leibniz 微分法则及(10), 有

$$|D_x^\alpha [e^{i\varphi(x, \theta)} L_\theta^1 a(x, \theta)]| \leq C'_\alpha (1 + |\theta|)^{m-1+|\alpha|}, \\ (x, \theta) \in \Omega \times (R_N \setminus 0), \quad (11)$$

其中常数 C'_α 与 x 无关. 对固定的 α , 取 $l \geq \frac{m+N+1+|\alpha|}{s}$, 则

由(11)知式(9)右边关于 $x \in \Omega$ 一致收敛, 且有

$$\begin{aligned} D_x^\alpha A(x) &= D_x^\alpha \int e^{i\varphi(x, \theta)} L_\theta^1 a(x, \theta) d\theta \\ &= \int D_x^\alpha [e^{i\varphi(x, \theta)} L_\theta^1 a(x, \theta)] d\theta \\ &= A_\alpha(x) \in C(\Omega). \end{aligned}$$

由 α 及 $\Omega \subset R_\Phi$ 的任意性知 $A(x) \in C^2(R_\Phi)$. 证毕.

推论1 设 $a \in S_{p, \infty}^m(X \times \mathbb{R}_N)$, 且 a 在 C_φ 的某个锥邻域中为零, 则 $A \in C^\infty(X)$.

证 由假定知在 $\text{supp } a$ 上 $|\varphi'_\theta| \neq 0$, 故可重复定理 1 的证明而得推论 1.

定义4 设 φ 为位相函数, 若向量组

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right)\equiv\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial\theta_j},\dots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial\theta_j},\frac{\partial^2\theta}{\partial\theta_1\partial\theta_j},\dots,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta_n\partial\theta_j}\right),\quad j=1,\dots,N_*$$

在集 C_Φ 上线性无关, 或等价地表述为: 若 $N \times (N+n)$ 矩阵

$$(\varphi''_{\theta 1}, \varphi''_{\theta 2}) \equiv$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_1 \partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_1 \partial \theta_N}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_1 \partial x_n}, \right. \\ \left. \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \right. \\ \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_N \partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_N \partial \theta_N}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_N \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta_N \partial x_n} \right)$$

的秩为 N , 则称 φ 为非退化的位相函数.

定理2 设 φ 为非退化位相, 则 C_φ 为 $X \times (R_N \setminus 0)$ 的 n 维子流形。

证 记 $\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}$, $j = 1, \dots, N$. 考虑映射

$f: X \times (R_N \setminus 0) \rightarrow R_N: f(x, \theta) = (\varphi_1(x, \theta), \dots, \varphi_N(x, \theta)).$

由非退化位相的定义及 C_φ 的定义知, R_N 中的零向量 $(0, \dots, 0)$ 为映射 f 的正则值. 据 1.4.4 中原像定理知 $C_\varphi = f^{-1}(0, \dots, 0)$ 为 $X \times (R_N \setminus 0)$ 的 n 维子流形. 证毕.

对于非退化位相, 推论 1 的结果还可以改进. 为此先叙述 $S_{p, \delta}^m$ 中函数的变量代换. 这在其它地方也是要用到的.

设 U 为 $R^n \times R_N$ 中关于 θ 为锥集的任一个域. 称 α 属于 $S_{p, \delta}^m(U)$, 若对任意集 $K \subset (R^n \times \sigma^{N-1}) \cap U$ 及任二指标组 α 与 β , 这里 σ^{N-1} 为 R_N 中的单位球面, 存在常数 $C = C(\alpha, \beta, K) > 0$, 使估计式 (1) 当 $(x, \frac{\theta}{|\theta|}) \in K$ 及 $|\theta| \geq 1$ 时成立.

以后简称乘积空间中关于第二个变元为锥集的域为锥域.

设 f 为由锥域 $V \subset R^{n_1} \times R_{N_1}$ 到锥域 $U \subset R^n \times R_N$ ($n_1 + N_1 = n + N$) 的微分同胚

$$f: (y, \eta) \in V \rightarrow (x(y, \eta), \theta(y, \eta)) \in U,$$

且 x 及 θ 关于 η 分别为正齐零次及一次的. 记

$$b(y, \eta) = a(x(y, \eta), \theta(y, \eta)) = (a \circ f)(y, \eta), \quad (12)$$

则有如下结果.

引理 2 设 $a(x, \theta) \in S_{p, \delta}^m(U)$, 且下列条件之一成立:

- a) $\rho + \delta = 1$;
- b) $\rho + \delta \geq 1$ 且 $x = x(y)$ 与 η 无关;
- c) $x = x(y), \theta = \theta(\eta)$;

则 $b \in S_{p, \delta}^m(V)$.

证 设 K_1 为 $(R^{n_1} \times \sigma^{N_1-1}) \cap V$ 中任一紧集. 当 $(y, \frac{\eta}{|\eta|})$

$\in K_1$ 时, 由 $\theta(y, \eta)$ 的连续性 & 关于 η 的正齐一次性, 知有

$$\begin{aligned}
1 + |\theta| &= 1 + |\eta| \left| \theta\left(y, \frac{\eta}{|\eta|}\right) \right| \\
&\leq 1 + |\eta| \sup_{K_1} |\theta(y, \eta)| \leq C_1(K_1)(1 + |\eta|) \\
C_1(K_1) &= \max(1, \sup_{K_1} |\theta(y, \eta)|) > 0.
\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}
1 + |\theta| &\geq C_2(K_1)(1 + |\eta|) \\
C_2(K_1) &= \min(1, \inf_{K_1} |\theta(y, \eta)|)
\end{aligned}$$

据正齐一次性假定及 f 的微分同胚性, 易知当且仅当 $\eta = 0$ 时, 才有 $\theta = 0$, 故 $C_2(K_1)$ 为正的常数. 结合所得两侧估计, 知存在常数 $C_1(K_1) > 0$ 及 $C_2(K_1) > 0$, 使

$$C_2(1 + |\eta|) \leq 1 + |\theta| \leq C_1(1 + |\eta|), \quad \forall \left(y, \frac{\eta}{|\eta|}\right) \in K_1.$$

记 $K = (\mathbb{R}^n \times \sigma^{N-1}) \cap f(K_1)$, 易知 K 为紧集, 且 $\left(x, \frac{\theta}{|\theta|}\right)$

$\in K$. 故有

$$\begin{aligned}
|b(y, \eta)| &= |a(x(y, \eta), \theta(y, \eta))| \leq C(K)(1 + |\theta|)^m \\
&\leq \begin{cases} C(K)[C_1(K_1)]^m(1 + |\eta|)^m, & \text{当 } m \geq 0, \\ C(K)[C_2(K_1)]^m(1 + |\eta|)^m, & \text{当 } m < 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

即存在常数 $C(K_1) > 0$, 使

$$|b(y, \eta)| \leq C(K_1)(1 + |\eta|)^m, \quad \forall \left(y, \frac{\eta}{|\eta|}\right) \in K_1.$$

上式表明: 当 $|\alpha + \beta| = 0$ 时, b 满足估式(1).

现在应用数学归纳法. 设 $|\alpha + \beta| = k$ 时, 估式(1)对 b 成立. 当 $|\alpha + \beta| = k + 1$ 时, 易知 $|\alpha|$ 及 $|\beta|$ 中至少有一个不为零. 不妨设 $|\beta| \neq 0$. 当 $|\alpha| \neq 0$ 时, 证明类似. 令 $\beta = \beta' + \beta''$, 其中

$|\beta''|=1$. 为确定起见, 可认为 $|\beta''|=(1,0,\dots,0)$. 记

$$b_1(y, \eta) = D_y b(y, \eta), \quad a_1(x, \theta) = b_1(y, \eta) \circ f^{-1}(x, \theta),$$

若能证 $a_1 \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$, 则由 $|\alpha + \beta'| = k$ 及 $b_1 = a_1 \circ f$ 知有:

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_y^\beta b(y, \eta)| &= |D_x^\alpha D_y^{\beta'} b_1(y, \eta)| \\ &\leq C(\alpha, \beta', K_1)(1 + |\eta|)^{m+\delta-\rho+|\alpha|+\delta+|\beta'|} \\ &= C'(\alpha, \beta, K_1)(1 + |\eta|)^{m-\rho+|\alpha|+\delta+|\beta|}, \\ &\quad \forall \left(y, \frac{\eta}{|\eta|}\right) \in K_1, \end{aligned}$$

即 b 对任何 α 及 β 满足估式 (1). 因此, 关键在于证明 $a_1 \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$. 为此可注意

$$\begin{aligned} a_1(x, \theta) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial a(x, \theta)}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_1} \right) (y(x, \theta), \eta(x, \theta)) \\ &\quad + \sum_{l=1}^N \frac{\partial a(x, \theta)}{\partial \theta_l} \left(\frac{\partial \theta_l}{\partial y_1} \right) (y(x, \theta), \eta(x, \theta)), \end{aligned} \quad (13)$$

显然有 $\frac{\partial a(x, \theta)}{\partial x_j} \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$. 据关于 x 及 θ 对 η 的正齐次性假

定, 知函数 $\frac{\partial x_j}{\partial y_1}(y(x, \theta), \eta(x, \theta))$ 关于 θ 为正齐零次的, 故属于

$S^0(U)$. 由此知 (13) 的第一个和属于 $S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$. 在第二个和

中, $\frac{\partial a(x, \theta)}{\partial \theta_l} \in S_{p, \delta}^{m-\rho}(U)$, 相应的因子是光滑函数, 且关于

θ 为正齐一次的, 因此属于 $S^0(U)$. 故第二个和属于类 $S_{p, \delta}^{m-\rho+1}(U)$.

当 $\rho + \delta \geq 1$ 时, 有 $S_{p, \delta}^{m-\rho+1} \subset S_{p, \delta}^{m+\delta}$, 故 $a_1 \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$.

当 $\theta = \theta(\eta)$ 时, 有 $\frac{\partial \theta_l}{\partial y_1} \equiv 0$, $l = 1, \dots, N$. 这时式 (13) 右边

只剩下第一个和, 故仍有 $a_1 \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$.

综合上面所证, 知引理 2 成立.

注 5 虽然在上述证明中不曾用到引理中的某些条件, 例如 $c)$ 中关于 $x = x(y)$ 的假定, 但是, 在 $|\beta| = 0$ 的情形却要用到它们.

引理 3 设 U 为 $R^n \times (R_N \setminus 0)$ 中的锥域, $\varphi_j(x, \theta) \in C^\infty(U)$, $j = 1, \dots, k$, 关于 θ 为正齐零次的, 且 $\nabla \varphi_j (j = 1, \dots, k)$ 在集 $C \equiv \{(x, \theta) \in U; \varphi_j(x, \theta) = 0, j = 1, \dots, k\}$ 上线性无关. 若 $a \in S_{p, \delta}^m(U)$, $a|_C = 0$, $\rho + \delta = 1$, 则存在 $a_j \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U)$, $j = 1, \dots, k$, 使

$$a = \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j. \quad (14)$$

证 由于 (14) 的右边是 a_j 的线性组合, 故只须局部地寻求 a_j , 即: 对 U 中任一固定点 (x_0, θ_0) , 在 (x_0, θ_0) 的某邻域中求出 a_j . 然后利用 U 上关于 θ 为正齐零次函数组成的单位分解, 把局部确定的 a_j 并合而得全局所需的 a_j . 至于上述的单位分解, 可如下构成. 设 $\{U_i\}$ 是 U 的开复盖列, 每个 U_i 都是 U 的开锥子集. 由对应于覆盖列 $\{U_i \cap (R^n \times \rho^{N-1})\}$ 的通常的 (即不必为 θ 的正齐零次函数) 单位分解 $\{h_i(x, \theta)\}$, 取 $e_i(x, \theta) = h_i\left(x, \frac{\theta}{|\theta|}\right)$, 即得所需的单位分解 $\{e_i(x, \theta)\}$. 若在每个 U_i 中

已求得 $a_j^{(i)} \in S_{p, \delta}^{m+\delta}(U_i)$, 使在 U_i 上有 $a = \sum_{j=1}^k a_j^{(i)} \varphi_j$, 则令

$$a_j(x, \theta) = \sum_i a_j^{(i)}(x, \theta) e_i(x, \theta), \quad (x, \theta) \in U$$

显然有 $a_j \in S_{\frac{n}{2}+\frac{k}{2}}^m(U)$, 且当 $(x, \theta) \in U$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_j a_j \varphi_j &= \sum_j \left(\sum_i a_j^{(i)} e_i \right) \varphi_j = \sum_i e_i \sum_j a_j^{(i)} \varphi_j \\ &= a \sum_i e_i = a\end{aligned}$$

由于对 i 的和是局部有限的而对 j 的和是有限的, 故可交换作和顺序.

现在局部地证明 $a_j^{(i)}$ 的存在性. 设 $(x_0, \theta_0) \in U$, 若 $(x_0, \theta_0) \notin C$, 则有某个 k_0 , $1 \leq k_0 \leq k$, 使 $\varphi_{k_0}(x_0, \theta_0) \neq 0$. 由 φ_{k_0} 的连续性 & 正齐零次性, 知 φ_{k_0} 在 (x_0, θ_0) 的某个锥邻域 U_0 中

不为零. 于是可在 U_0 中取 $a_j \equiv 0$, $j \neq k_0$, $a_{k_0} = \frac{1}{\varphi_{k_0}}$, 即知 (14)

在 U_0 中成立.

若 $(x_0, \theta_0) \in C$, 因 $\nabla \varphi_j (j=1, \dots, k)$ 在 C 上线性无关, 故可作自变量的剖分: $(x, \theta) = (x', x'', \theta', \theta'')$, 其中

$$(x', \theta') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}_{N'}, \quad (x'', \theta'') \in \mathbb{R}^{n''} \times \mathbb{R}_{N''},$$

使 $n' + N' = k$, 且

$$W(x, \theta) \equiv \det \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x'_i}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta'_i} \right),$$

在点 (x_0, θ_0) 不为零. 注意到 W 的光滑性且关于 θ 为正齐 $-N'$ 次函数, 知 W 在 (x_0, θ_0) 的某个锥邻域 U_0 中恒不为零.

考虑映射 $f: (x, \theta) \in U_0 \rightarrow (y, \eta) \in V_0 \subset \mathbb{R}^{k+n''} \times \mathbb{R}_{N''}$, 其中 $y = (y', y'')$, $y' = (\varphi_1(x, \theta), \dots, \varphi_k(x, \theta))$, $y'' = x''$, $\eta = \theta''$. 易知 f 为由 U_0 到 V_0 的微分同胚, 且对任何 $t > 0$, 下图

$$\begin{array}{ccc} (x, \theta) & \xrightarrow{f} & (y, \eta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (x, t\theta) & \xrightarrow{f} & (y, t\eta) \end{array}$$

为可换的。故 V_0 为 $\mathbf{R}^{k+n''} \times \mathbf{R}_{N''}$ 中的锥域 (关于 η)，且 f 映 $C \cap U_0$ 为锥集 $II = \{(y, \eta) \in V_0: y' = 0\}$ 。

记 $b(y, \eta) = a_0 f^{-1}$ 。由引理 2 知 $b \in S_{p, 0}^m(V_0)$ ；且由 $a|_C = 0$ 知 $b(0, y'', \eta) = 0$ 。故有

$$\begin{aligned} b(y, \eta) &= b(y', y'', \eta) - b(0, y'', \eta) = \int_0^1 \frac{d}{dt} b(ty', y'', \eta) dt \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\int_0^1 \left(\frac{\partial b}{\partial y'_j} \right) (ty', y'', \eta) dt \right] y'_j \\ &= \sum_{j=1}^k b_j(y, \eta) y'_j, \end{aligned} \quad (14')$$

$$b_j(y, \eta) = \int_0^1 \frac{\partial b}{\partial y'_j} (ty', y'', \eta) dt.$$

易知 $b_j \in S_{p, 0}^{m+1}(V_0)$ ，故 $a_j = b_j \circ f \in S_{p, 0}^{m+1}(U_0)$ 。由 (14') 有：

$$\begin{aligned} a(x, \theta) &= (b \circ f)(x, \theta) = \sum_{j=1}^k (b_j \circ f)(x, \theta) \cdot \varphi_j(x, \theta) \\ &= \sum_{j=1}^k a_j(x, \theta) \varphi_j(x, \theta), \quad (x, \theta) \in U_0, \end{aligned}$$

即局部地有 (14) 成立。这里用到引理 2 并涉及 f^{-1} ，所以必须假定其中的条件 a) 及 c) 之一成立。当 φ_j 仅为 x 的函数时，由 f 的具体构造知条件 c) 自动满足。

定理 3 设 φ 为非退化位相函数， $a \in S_{p, 0}^m(X \times \mathbf{R}_N)$ ，且或

者 $\rho > \delta$, $\rho + \delta = 1$, 或者 $\rho > \delta$ 且 φ 关于 θ 为线性的, 则有:

- 1) 若 a 在 C_φ 上无穷阶为零, 则 $A(x) \in C^\infty(X)$;
- 2) 若在 C_φ 上 $a = 0$, 则存在 $b \in S_{\rho-\delta}^{m+\delta}(\mathcal{X} \times \mathbf{R}_N)$, 使对每个 $u \in C_0^\infty(X)$, 有 $I_\varphi(au) = I_\varphi(bu)$.

证 记 $\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}$, $j = 1, \dots, N$. 据假定知: 或者 φ_j 不依赖于 θ , 或者 $\rho + \delta = 1$. 故由引理 3 得: 当 $a|_{C_\varphi} = 0$ 时, a 可表示为:

$$a = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_j}, \quad a_j \in S_{\rho+\delta}^{m+\delta}(U).$$

这里 $U = X \times \mathbf{R}_N$. 由分部积分可得

$$I_\varphi(au) = \sum_{j=1}^N i I_\varphi\left(\frac{\partial a_j}{\partial \theta_j} u\right) = I_\varphi(bu),$$

$$b = i \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \theta_j}.$$

因 $\frac{\partial a_j}{\partial \theta_j} \in S_{\rho+\delta-1}^{m+\delta-1}$, 故结论 2) 成立.

若 C_φ 上的点都是 a 的无穷阶零点, 则也是 b 的无穷阶零点. 于是可重复应用结论 2), 即知结论 1) 成立.

3.2 Fourier 积分算子

本节扼要介绍 Fourier 积分算子的概念及简单性质, 并以引出拟微分算子. 这里只限于 Euclid 空间中的域上的 Fourier 积分算子(局部理论), 而不涉及一般流形上的情形(全局

理论)。

3.2.1 基本概念

设 X 及 Y 分别是 R^{n_x} 及 R^{n_y} 中的域, n_x 及 n_y 表示空间的维数, 考虑如下的积分

$$(Au)(x) = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta, \quad (1)$$

$$\forall u \in C_0^\infty(Y), \quad \forall x \in X.$$

其中 φ 为定义于 $X \times Y \times R_N$ 的位相函数, $a \in S_{\rho, \delta}^m(X \times Y \times R_N)$, 这里 $X \times Y$ 相当于 3.1.1 定义 1 中的 X , 即 a 应满足估计式

$$\begin{aligned} & |D_\theta^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \theta)| \\ & \leq C(\alpha, \beta, \gamma, K) (1 + |\theta|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta| + \gamma|}, \\ & \forall (x, y, \theta) \in K \times R_N, \end{aligned}$$

K 为 $X \times Y$ 中任一紧集. 以后恒假定 $\rho > 0$, $\delta < 1$. 于是积分

$$(Au, v) = \iiint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) v(x) dx dy d\theta, \quad (2)$$

$$\forall u \in C_0^\infty(Y), \quad v \in C_0^\infty(X)$$

为通常的振荡积分, 而以 a 为振幅函数.

容易看出: 对每个固定的 $u(y) \in C_0^\infty(Y)$, 式(2) 确定一个广函 $Au \in \mathcal{D}'(X)$, 故可定义线性算子

$$A: C_0^\infty(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X). \quad (3)$$

定义1 由式(2)确定的线性算子 A 称为 Fourier 积分算子, 并形式地把 Au 表示为(1)式, 而称 φ 为其位相, a 为其振幅.

Fourier 积分算子通常简记为 FIO.

由下式

$$(K_A, w) = \iiint e^{i\varphi(x, y, z)} a(x, y, \theta) w(x, y) dx dy d\theta, \quad (4)$$

$$\forall w \in C_0^\infty(X \times Y)$$

确定的广函 $K_A \in \mathscr{D}'(X \times Y)$ 称为算子 A 的核.

特别当 $w(x, y) = u(y)v(x)$ 时, 显然有

$$(Au, v) = (K_A, uv), \quad \forall u \in C_c^\infty(Y), \quad v \in C_0^\infty(X). \quad (5)$$

定理1 a) $K \in C^\infty(R_\varphi)$

$$R_\varphi \equiv \{(x, y, \theta): |\varphi_{\theta'}'(x, y, \theta)| \equiv |\nabla_{\theta'}\varphi| \neq 0, \\ (x, y, \theta) \in X \times Y \times (\mathbf{R}_N \setminus 0)\}$$

b) 若在集

$$C_\varphi \equiv \{(x, y, \theta): |\varphi_{\theta'}'(x, y, \theta)| \neq 0, \\ (x, y, \theta) \in X \times Y \times (\mathbf{R}_N \setminus 0)\}$$

的某个锥邻域中 $a \equiv 0$, 则 $K_A \in C^\infty(X \times Y)$.

这是3.1.3定理1及推论1的直接推论.

定义2 位相 $\varphi(x, y, \theta)$ 若满足下列二条件:

$$|\varphi_{y, \theta'}'(x, y, \theta)| \equiv |(\nabla_y \varphi, \nabla_{\theta'} \varphi)| \neq 0, \\ (x, y, \theta) \in X \times Y \times (\mathbf{R}_N \setminus 0), \quad (6)$$

$$|\varphi_{x, \theta'}'(x, y, \theta)| \neq 0, \quad (x, y, \theta) \in X \times Y \times (\mathbf{R}_N \setminus 0), \quad (7)$$

即称 φ 为算子位相函数.

定理2 若条件(6)成立, 则算子(1)为由 $C_0^\infty(Y)$ 到 $C^\infty(X)$ 的连续线性映射.

证 由条件(6)知(1)是含参变量 x 的振荡积分, 故

$$Au = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} L_{y, \theta'}^{1, \theta} [a(x, y, \theta)u(y)] dy d\theta.$$

仿照3.1.3定理1的证明, 知有 $Au \in C^\infty(X)$.

其次, 设列 $\{u_j(y)\} \subset \mathscr{D}(Y)$ 并按其中拓扑趋于零. 容易建立估计式

$$|D_x^\gamma (e^{i\varphi(x, y, \theta)} L_{y, \theta'}^{1, \theta} [a(x, y, \theta)u_j(y)])|$$

$$\leq C_j(\gamma, K_1)(1+|\theta|)^{m-l+\delta|\gamma|},$$

$$\forall x \in K_1, y \in K_2, s = \min(\rho, 1-\delta),$$

其中 K_1 及 K_2 分别是 X 及 Y 中任意紧集, $l = l(r)$ 充分大, 且可选择 C_j 使 $C_j \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$. 故 $(Au_j)(x)$ 的各阶导数在 K_1 上一致地趋于零, 即: Au_j 在 $C^\infty(X)$ 中趋于零. 由此得 A 的连续性. A 的线性是显然的. 定理证毕.

现在定义(1)的转置算子 ${}^t A$ 如下:

$$({}^t Av)(y) = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a(x, y, \theta) v(x) dx d\theta, \\ \forall v \in C_0^\infty(X). \quad (8)$$

显然, ${}^t A$ 为映 $C_0^\infty(X)$ 到 $\mathcal{D}'(Y)$ 中的 FIO, 且有:

$$(Au, v) = (K_A, uv) = (u, {}^t Av), \\ \forall u \in C_0^\infty(Y), v \in C_0^\infty(X) \quad (9)$$

定理3 若条件(7)成立, 则算子 A 可延拓为连续性映射, $\mathcal{D}'(Y) \rightarrow \mathcal{D}'(X)$.

证 当 $u \in C_0^\infty(Y)$, 由(9)知有

$$(Au, v) = (u, {}^t Av), \quad \forall v \in C_0^\infty(X). \quad (9')$$

当 $u \in \mathcal{D}'(Y)$ 时, (9') 一般不成立, 因 Au 及 $(u, {}^t Av)$ 可能都无意义. 但若(7)成立, 则可应用定理2于 ${}^t A$, 而得 ${}^t Av \in C^\infty(Y)$, 这时(9')的右边有意义. 于是可用(9')的右边定义 (Au, v) , 即定义

$$(Au, v) = (u, {}^t Av), \quad u \in \mathcal{D}'(Y), v \in C_0^\infty(X), \quad (10)$$

故 Au 为 $C_0^\infty(X)$ 上的线性泛函. 为证 $Au \in \mathcal{D}'(X)$, 令 $v_j(x) \rightarrow 0$ (按 $\mathcal{D}(X)$ 中的收敛定义). 据定理2知 ${}^t Av_j \rightarrow 0$ (按 $C^\infty(Y)$ 中拓扑). 故

$$(Au, v_j) = (u, {}^t Av_j) \rightarrow 0.$$

算子 A 的连续性可类似地证明.

推论1 设 A 为具算子位相 φ 的 FIO, 则 A 为 由 $C_0^\infty(Y)$ 到 $C^\infty(X)$ 的连续线性映射, 并可延拓为由 $\mathcal{E}'(Y)$ 到 $\mathcal{D}'(X)$ 的连续性映射.

3.2.2 奇台的变化

设 A 为具算子位相 φ 的 FIO, 于是 A 映 $\mathcal{E}'(Y)$ 于 $\mathcal{D}'(X)$ 中. 现在研究紧台广函的奇台在 A 作用后出现的变化.

为了叙述的方便, 先引进一种记法. 设 X 及 Y 为任二集合, S 为 $X \times Y$ 的子集, K 为 Y 的子集, 记

$$S \circ K \equiv \{x, x \in X, \exists y \in K, \text{使} (x, y) \in S\}.$$

若用 π_1 及 π_2 分别表示 $X \times Y$ 到 X 及 Y 的自然投影, 则显然有

$$S \circ K = \pi_1[\pi_2^{-1}(K) \cap S].$$

定理4 设 A 为具算子位相的 FIO, $u \in \mathcal{E}'(Y)$, 则成立如下的包含关系:

$$\text{sing supp } Au \subset S_\varphi \circ \text{sing supp } u, \quad (11)$$

$$S_\varphi \equiv (X \times Y) \setminus R_\varphi \equiv \{(x, y), \exists \theta \in R_N \setminus 0, \\ \text{使} |\varphi_\theta'(x, y, \theta)| = 0\}.$$

证 首先指出, 为证明(11), 只须证明如下的较弱结论:

$$\text{sing supp } Au \subset S_\varphi \circ \text{supp } u, \quad (11')$$

事实上, 设(11')成立. 取 $\text{sing supp } u$ 的任一邻域 U , 选 $\psi(y) \in C_0^\infty(U)$, 使 ψ 在 u 的奇台上取值1. 令 $u_1 = (1 - \psi)u, u_2 = \psi u$. 显然有 $u_1 \in C_0^\infty(Y)$. 故由推论1知 $Au_1 \in C^\infty(X)$. 于是

$$\begin{aligned} \text{sing supp } Au &= \text{sing supp } A(u_1 + u_2) \\ &\subset (\text{sing supp } Au_1) \cup \text{sing supp } Au_2 = \text{sing supp } Au_2. \end{aligned}$$

注意到 $\text{supp } u_2 \subset U$, 并对 u_2 应用(11'), 即得

$$\text{sing supp } Au \subset \text{sing supp } Au_2 \subset S_\varphi \circ \text{supp } u_2 \subset S_\varphi \circ U.$$

由于 U 是 $\text{sing supp } u$ 的任何邻域, 故 (11) 成立. 剩下须证明 (11'). 记 $K = \text{supp } u$, 设 K' 是 X 中不与 $S_\varphi \circ K$ 相交的任一紧集, 则 $K' \times K \subset R_\varphi$. 易知 R_φ 为开集, 故存在开邻域 $\Omega \supset K$ 及 $\Omega' \supset K'$, 使 $\Omega' \times \Omega \subset R_\varphi$. 只须核验 $Au \in C^\infty(\Omega')$. 为此可注意 $K_A \in C^\infty(\Omega' \times \Omega)$, 于是对每个 $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega')$, 有:

$$(Au, \psi) = (u, {}^t A\psi) = \left(u, \int K_A(x, y) \psi(x) dx \right)$$

$$= ((u, K_A)_y, \psi)_x = \int f(x) \psi(x) dx$$

$$f(x) = (u, K_A)_y \in C^\infty(\Omega'),$$

故确有 $Au \in C^\infty(\Omega')$. 由于 K' 是 $X \setminus (S_\varphi \circ K)$ 中任意紧集, 知 (11') 成立. 定理证毕.

推论2 设 A 是具算子位相的 FIO, 则成立如下的包含关系.

$$\text{sing supp } Au \subset (\text{singsupp } K_A) \circ \text{sing supp } u,$$

$$\forall u \in \mathcal{D}'(Y).$$

证 在定理4的证明中, 换 S_φ 为 $\text{sing supp } K_A$, 进行同样推导, 即得所需包含关系.

例1 考虑初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (12)$$

$$f|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = u(x).$$

暂假定 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 利用 Fourier 变换, 容易求出这个问题的解为

$$f(x, t) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \frac{\sin t |\xi|}{|\xi|} u(y) dy d\xi$$

取 $\tau(\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, 且当 $|\xi| < 1$ 时 $\tau(\xi) = 1$, 上式可改写为

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \iint e^{it[(x-y, \xi) + t|\xi|]} [1 - \tau(\xi)] \frac{1}{2i|\xi|} u(y) dy d\xi \\ &+ \iint e^{it[(x-y, \xi) - t|\xi|]} [1 - \tau(\xi)] \frac{1}{2i|\xi|} u(y) dy d\xi \\ &+ \iint e^{it(x-y, \xi)} \frac{\tau(\xi) \sin t|\xi|}{|\xi|} u(y) dy d\xi \\ &\equiv A_+ u + A_- u + Ru. \end{aligned}$$

其中 A_\pm 分别为具位相 $\varphi_\pm(x, y, \xi) = (x - y, \xi) \pm t|\xi|$ 及振幅 $a_\pm(x, y, \xi) = \pm [1 - \tau(\xi)] \frac{1}{2i|\xi|} \in S^{-1}$ 的 FIO, 而 R 则为具光滑核

$r(x, y) = \int e^{it(x-y, \xi)} \tau(\xi) \frac{\sin t|\xi|}{|\xi|} d\xi$ 的积分算子. 这些

函数都含参变量 t .

容易验证 φ_\pm 及 φ 都是算子位相函数, 故 A_+ 及 A_- 都可延拓为连续映射: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$; 而 R 作为具 C^∞ 光滑核的积分算子, 显然是连续映射: $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且光滑地依赖于参变量 t . 由此可知, 若初值问题 (12) 中的初值 $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 (12) 的广义解可表示为:

$$f = A_+ u + A_- u + Ru,$$

于是可以考察 u 的奇性如何传播于 f 的问题. 由于 $Ru \in C^\infty$, 故这一项对 f 不产生奇性. 显然, A_+ 及 A_- 的作用相似. 为简单起见, 下面只讨论 $f_+ \equiv A_+ u$ 的奇性.

因 $(\varphi_+)_\xi = x - y + t \frac{\xi}{|\xi|}$, 故有

$$C_{\varphi_+} = \left\{ (t, x, y, \xi) : y - x = \frac{t\xi}{|\xi|} \right\};$$

$$S_{\varphi_{\pm}} = \{(t, x, y): |x - y|^2 = t^2\}.$$

据定理 4 知, f_{\pm} 随之 f 的奇性应位于集

$$\{(t, x): y \in \text{sing supp } u, |x - y|^2 = t^2\}$$

中. 这正是经典结果: 奇性以速率 a (这里取 $a = 1$) 沿特征锥 $|x - y|^2 = t^2$ 传播. 特别地, 基本解 ($u = \delta(x)$) 的情形) 的奇性位于锥 $|x|^2 = t^2$ 上.

附带指出, 位相 $\varphi_{\pm} = (x - y, \xi) \pm t|\xi|$ 在 $|\xi| = 0$ 不可微, 这正是在位相定义中只要求 $\varphi \in C^{\infty}(X \times Y \times (\mathbb{R}_N \setminus 0))$ 的原因.

3.2.3 拟微分算子

定义3 设 $n_x = n_y = N = n$, $X = Y$, $a(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$, 则具位相 $\varphi = (x - y, \xi)$ 的 FIO 称为 m 阶 (ρ, δ) 型的拟微分算子 (以后简记拟微分算子为 ψ DO), 其全体记为 $L_{\rho, \delta}^m(X)$ 或 $L_{\rho, \delta}^m$; 特别地, $L_{1, 0}^m$ 记为 L^m , 并约定 $L^{-\infty} = \bigcap_m L^m$.

例2 设 $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$, $a_{\alpha}(x) \in C^{\infty}(X)$, 如本章开始一段所述, 对每个 $u(x) \in C_0^{\infty}(X)$, 有

$$P(x, D)u(x) = \iint e^{i(x-y, \xi)} P(x, \xi) u(y) dy d\xi,$$

故 $P(x, D) \in L^m(X)$. 函数 $P(x, \xi)$ 称为线性偏微分算子 $P(x, D)$ 的(全)特征.

例3 设 R 是具 C^{∞} 光滑核 $r(x, y)$ 的积分算子, 即对每个 $u \in C_0^{\infty}(X)$, 有

$$Ru = \int r(x, y) u(y) dy, \quad r \in C^{\infty}(X \times X),$$

则 $R \in L^{-\infty}$.

事实上, 取 $\tau(\xi) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_n)$, $\tau(\xi) \geq 0$, $\int \tau(\xi) d\xi = 1$, 则有

$$Ru = \iint e^{i(x-y, \xi)} [e^{-i(x-y, \xi)} r(\xi) r(x, y)] u(y) dy d\xi$$

记 $a(x, y, \xi) = e^{-i(x-y, \xi)} r(\xi) r(x, y)$, 易知 $a \in S^{-\infty}$, 故 $R \in L^{-\infty}$.

反之, 容易证明 $L^{-\infty}(X)$ 中的每个 ψ DO 可表为具 C^∞ 光滑核的积分算子.

例3 表明一个 ψ DO 的振幅不是唯一的, 因 τ 不唯一.

例4 考虑卷积算子

$$Gu \equiv g * u = \int g(x-y) u(y) dy, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

其中 $g \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. 虽然这个算子可作为例3的特殊情形, 但它可引出另一种有用表达式

$$\begin{aligned} Gu &= \int e^{i(x-\xi)} \widehat{g} \widehat{u}(\xi) d\xi = \int e^{i(x-\xi)} \widehat{g}(\xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{i(x-y, \xi)} \widehat{g}(\xi) u(y) dy d\xi, \end{aligned}$$

由此知 $G \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

显然, $\varphi = (x-y, \xi)$ 是非退化的位相函数, 故可应用 3.1.3 中定理3及本节的定理1与4, 而得下面的结果.

定理5 设 A 是由下式给出的 ψ DO.

$$(Au)(x) = \iint e^{i(x-y, \xi)} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (13)$$

记 A 的广函核为 K_A . 引进对角集

$$\Delta \equiv \{(x, y); x = y, (x, y) \in X \times X\}$$

则有 a) $K_A \in C^\infty((X \times X) \setminus \Delta)$;

b) 算子 A 确定如下的连续线性映射:

$$A: C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X), \quad (14)$$

$$A: \mathscr{D}'(X) \rightarrow \mathscr{D}'(X), \quad (15)$$

且当 $u \in \mathcal{E}'(X)$ 时, 成立如下的拟局部性.

$$\text{sing supp } Au \subset \text{sing supp } u. \quad (16)$$

c) 若振幅 $a(x, y, \xi)$ 在对角集 Δ 上为零, 且 $\rho > \delta$, 则在 (13) 中可换 $a(x, y, \xi)$ 为 $b(x, y, \xi) \in S_{\rho}^{m-(\rho-\delta)}(X \times X \times \mathbb{R}_n)$;

d) 若对角集 Δ 上每一点都是 a 的无穷阶零点, 则 $K_A \in C^\infty(X \times X)$, 且算子 A 映 $\mathcal{E}'(X)$ 到 $C^\infty(X)$ 中.

注1 线性微分算子 $A(x, D)$ 具局部性

$$\text{supp } Au \subset \text{supp } u, \quad \forall u \in C_0^\infty(X). \quad (17)$$

拟微分算子一般不具备局部性, 例如, 对具光滑核的积分算子 (例3), 当且仅当它的核恒等于零时, 才有局部性(17).

Peetre曾证明 (见 Math. Scand. 8(1960)116-120), 由 $C^\infty(X)$ 到 $C^k(X)$ 的线性映射是具 C^k 系数的线性微分算子的充要条件是: 它满足局部性(17).

3.3 拟微分算子代数

3.3.1 适拟微分算子

一般说来, 两个 ψ DO 不能相乘 (合成), 因为值域 C^∞ 或 \mathcal{E}' 超出相应的定义域 C_0^∞ 或 \mathcal{E}' .

下面将要引进的适拟微分算子类具有很好性质: 它们把 C_0^∞ 、 \mathcal{E}' 等空间映到其自身. 这样, 就可以在适拟微分算子类中引进乘法 (合成), 使它们构成代数系统; 而且, 任一个 ψ DO 可以分解成一个适拟微分算子与一个具光滑核的积分算子之和, 从而在 $\text{mod}(L^{-\infty})$ 的意义下, 拟微分算子的同余类构成一个代数.

设 G 是乘积空间 $X \times X$ 的子集, π_1 及 π_2 分别为 $X \times X$ 到第

一及第二个因子空间的典则投影, 即, $\pi_1(x, y) = x$, $\pi_2(x, y) = y$, $\forall (x, y) \in X \times X$. 若对 X 中任一紧集 K , 集 $\pi_1^{-1}(K) \cap G$ 或为紧集, 或为空集, 且 $\pi_2^{-1}(K) \cap G$ 具类似情况, 则称 G 为 $X \times X$ 的适子集, 简称适集.

定义1 设 A 为 ψ DO, 其核为 K_A . 若 $\text{supp} K_A$ 为 $X \times X$ 的适集, 则称 A 为具适合的 ψ DO, 简称为适 ψ DO (properly supported pseudo-differential operator).

由显见的关系式

$$K_{t_A}(x, y) = K_A(y, x).$$

易知若 A 为适 ψ DO, 则 t_A 也是适 ψ DO.

定理1 若 A 为适 ψ DO, 则 A 确定连续线性映射:

$$A: C_0^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(X), \quad (1)$$

并可延拓为下列连续线性映射:

$$A: \mathcal{E}'(X) \rightarrow \mathcal{E}'(X); \quad (2)$$

$$A: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X); \quad (3)$$

$$A: \mathcal{D}'(X) \rightarrow \mathcal{D}'(X). \quad (4)$$

证 设 $u(y) \in C_0^\infty(X)$. 上节已证明: A 确定连续线性映射: $C_0^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$. 若能证明 Au 具紧台, 则 (1) 成立. 为此, 证明包含关系

$$\text{supp} Au \subset (\text{supp} K_A) \cdot \text{supp} u. \quad (5)$$

事实上, 若 $v \in C_0^\infty(X')$, $X' = X \setminus (\text{supp} K_A \cdot \text{supp} u)$, 则

$$(\text{supp} v \times \text{supp} u) \cap \text{supp} K_A = \emptyset$$

故有

$$(Au, v) = (K_A, uv) = 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(X), v \in C_0^\infty(X').$$

这表明 Au 在 X' 中恒等于零, 而得包含关系 (5). 因 $\text{supp} K_A$ 为适集, $\text{supp} u$ 为紧集, 据适集的定义知 $\text{supp} K_A \cap \pi_2^{-1}(\text{supp} u)$

为紧集。其次，由于

$$\text{supp} K_A \circ \text{supp} u = \pi_1[\text{supp} K_A \cap \pi_2^{-1}(\text{supp} u)]$$

故 $\text{supp} K_A \circ \text{supp} u$ 作为紧集在连续映射 π_1 的作用下的象集，亦为紧集。由(5)知 $\text{supp} Au$ 为紧集，即 $Au \in C_0^*(X)$ ，随之(1)成立。

必须注意， $\text{supp} K_A \cap \pi_2^{-1}(\text{supp} u)$ 可以是空集。这时(5)表明 $\text{supp} Au$ 为空集，即 Au 是 $C_0^*(X)$ 中零元。

至于映射(1)的连续性，不难由(5)及映射 $A: C_0^*(X) \rightarrow C^*(X)$ 的连续性推出。

今设 $u \in \mathcal{D}'(X)$ 。因 ${}^t A$ 也是适 ψ DO，故 ${}^t A$ 确定连续线性映射： $C_0^*(X) \rightarrow C_0^*(X)$ 。于是可如下定义 Au ，

$$(Au, v) = (u, {}^t Av), \quad \forall v \in C_0^*(X).$$

易知 $Au \in \mathcal{D}'(X)$ ，故(4)成立，且相应的映射在弱意义下连续。

为证(3)，设 $u \in C^*(X)$ 。由已证得的(4)，知 $Au \in \mathcal{D}'(X)$ 。今证明实际有 $Au \in C^*(X)$ 。任意取 $\omega \subseteq X$ ，即 ω 为 X 的相对紧开子集。对每个 $v \in C_0^*(\omega)$ ，有

$$\text{supp } {}^t Av \subset \text{supp} K_{{}^t A} \circ \text{supp} v \subset \text{supp} K_{{}^t A} \circ \overline{\omega} \equiv K$$

K 显然为紧集。取 $\psi(y) \in C_0^*(X)$ ，使在 K 上 $\psi \equiv 1$ ，则

$(Au, v) = (u, {}^t Av) = (\psi u, {}^t Av) = (A(\psi u), v)$ ， $\forall v \in C_0^*(\omega)$ 即在 ω 中有 $Au = A(\psi u)$ 。但 $\psi u \in C_0^*(X)$ ，故 $A(\psi u) \in C_0^*(X)$ 。特别有 $A(\psi u) \in C^*(\omega)$ ，即 $Au \in C^*(\omega)$ 。由 ω 的任意性知 $Au \in C^*(X)$ ，故(3)成立。剩下须证相应映射的连续性。设 $\{u_j\}$ 是 $C^*(X)$ 中收敛于零的任一函数列。今证 $Au_j(x)$ 在 $C^*(X)$ 中收敛于零。为此取任意紧集 $K_1 \subset X$ ，记 $K_2 = \text{supp} K_{{}^t A} \circ K_1$ 。于是可取 $\psi(y) \in C_0^*(X)$ ，使 ψ 在 K_2 的某个邻域中恒等于1。如上所证，当 $x \in K_1$ 时，有 $(Au_j)(x) = [A(\psi u_j)](x)$ 。因 $\psi(y)u_j(y)$ 在 $C_0^*(X)$ 中收敛于零，故 $A(\psi u_j)$ 在 $C_0^*(X)$ 中收敛于零，即

$(Au_j)(x)$ 的各阶导数在 K_1 上一致收敛于零. 由于 K_1 是 X 的任一紧集, 知 Au_j 在 $C^*(X)$ 中收敛于零.

最后, 因 C^* 的对偶空间是 \mathscr{D}' , 利用转置算子 tA , 仿照 (4) 可得映射 (2) 及其连续性.

定义2 设 $a \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$, 记 $\text{supp}_{x, y} a$ 为 $\text{supp} a$ 在 $X \times X$ 上的投影的闭包. 若 $\text{supp}_{x, y} a$ 为适集, 则称 a 具适台.

由显然的包含关系 $\text{supp} K_A \subset \text{supp}_{x, y} a$ 知: 当 a 具适台时, 以 a 为振幅的 ψ DO 必为适 ψ DO. 逆命题依如下意义成立.

定理2 若 A 为适 ψ DO, $A \in L_{p, \delta}^m(X)$, 则 A 有具适台的振幅 $a \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$.

证 取 $\tau(x, y) \in C^\infty(X \times X)$, 使在 $\text{supp} K_A$ 的某个邻域中 $\tau \equiv 1$, 且 τ 具适台. 若 $a \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$ 为 A 的任一振幅 (不必具适台), 令 $a' = \tau a$, 则 a' 必为 A 的具适台的振幅, 且 $a' \in S_{p, \delta}^m$. 事实上, 设 A' 为以 a' 作振幅的 ψ DO, 简记为 $A' = O_p(a')$. 显然有 $K_{A'} = \tau K_A$, 于是

$$\begin{aligned} (A'u, v) &= (K_{A'}, uv) = (\tau K_A, uv) \\ &= (K_A, uv) = (Au, v) \\ &\quad \forall u \in \mathscr{D}'(X), v \in C_0^\infty(X), \end{aligned}$$

故 $A'u = Au$, 即 $A' = A$, 随之 $A = O_p(a')$.

至于满足上述要求的 $\tau(x, y)$, 可如下构造. 设 $\{e_j(y)\}$ 为 X 上的单位分解. 记 $K_j = \text{supp} K_A \circ \text{supp} e_j$, 则 K_j 为 X 中紧集. 故可取 $f_j(x) \in C_0^\infty(X)$, 使 f_j 在 K_j 的某邻域中恒等于 1. 记 $w_1(x, y) = \sum_j e_j(y) f_j(x)$. 容易验证 $w_1 \in C^\infty(X \times X)$, 且 w_1 在 $\text{supp} K_A$ 的某个邻域中恒等于 1, 并对每个紧集 $K \subset X$, 使 $(\pi_1^{-1} K) \cap \text{supp} w_1$ 为紧集. 类似地, 记 $K'_j = \pi_2[(\pi_1^{-1} \cdot \text{supp} e_j) \cap \text{supp} K_A]$, 取 $g_j(y) \in C_0^\infty(X)$, 且在 K'_j 的某个邻域

中 $g_j \equiv 1$. 令 $w_2(x, y) = \sum e_j(x)g_j(y)$, 则 w_2 在 $\text{supp} K_A$ 的某个邻域中恒等于 1, 且对每个紧集 $K \subset X$, 使 $(\pi_1^{-1}K) \cap \text{supp} w_2$ 为紧集. 则 $\tau(x, y) = w_1(x, y)w_2(x, y)$ 即为所求.

定理3 每个拟微分算子 A 可表为 $A = A_1 + A_2$, 这里 A_1 为适 ψ DO, 而 A_2 的核 $K_{A_2} \in C^\infty(X \times X)$.

证 从定理2的证明过程可知, 对 $X \times X$ 的每个适集 G , 存在具适台的 $\tau(x, y) \in C^\infty(X \times X)$, 使在 G 的某个邻域中 $\tau \equiv 1$ (只须把那里的 $\text{supp} K_A$ 换为 G , 则相应的 τ 即为所需).

特别取 G 为对角集 Δ , 记 $a_1 = \tau a$, $a_2 = (1 - \tau)a$, $A_1 = O_p(a_1)$, $A_2 = O_p(a_2)$, 则 $A = A_1 + A_2$. 据定理2知 A_1 为适 ψ DO, 由 3.2.3 定理5中d) 知 $K_{A_2} \in C^\infty(X \times X)$.

定理4 拟微分算子 A 为适 ψ DO 的充要条件是下面的两个要求:

a) 对任一紧集 $K \subset X$, 存在紧集 $K_1 \subset X$, 使由 $\text{supp} u \subset K$, 有 $\text{supp} Au \subset K_1$;

b) 对任一紧集 $K_1 \subset X$, 存在紧集 $K \subset X$, 使由 $\text{supp} v \subset K_1$, 有 $\text{supp}^* Av \subset K$.

证 必要性 由(5)知a)成立; 又由 A 为适 ψ DO 知 *A 为适 ψ DO, 故b)也成立.

充分性 据定理3知, 不失一般性, 只须对 $K_A \in C^\infty(X \times X)$ 的情形进行讨论.

设 K 为 X 中任一紧集, K_1 为条件 a) 中所述相应紧集. 今证明

$$\pi_2^{-1}(K) \cap \text{supp} K_A \subset K_1 \times K \quad (6)$$

事实上, 对任一个 $w(x, y) \in C_0^\infty[K \times (X \setminus K_1)]$, 可视 w 为以 x 作参变元而以 y 作变元的函数, 记为 $w_x(y)$, 则 $w_x(y) \in C_0^\infty(K)$.

由条件a)知

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \int K_A(x, y) w(x, y) dy \\ &\equiv \int K_A(x, y) w_x(y) dy \equiv Aw_x(y) \in C_0^\infty(K_1) \end{aligned}$$

记 $K'_1 = \pi_1(\text{supp} w)$, 显然有 $K'_1 \cap K_1 = \emptyset$, 于是

$$\begin{aligned} (K_A, w) &= \iint_{K'_1 \times K} K_A(x, y) w(x, y) dx dy \\ &= \int_{K'_1} \left(\int_K K_A(x, y) w_x(y) dy \right) dx = \int_{K'_1} F(x) dx = 0, \end{aligned}$$

故包含关系(6)成立, 随之 $\pi_1^{-1}(K) \cap \text{supp} K_A$ 为紧集. 利用条件b), 同理可证: 对任一紧集 $K \subset X$, 集 $\pi_1^{-1}(K) \cap \text{supp} K_A$ 为紧集. 故 $\text{supp} K_A$ 为适集, 随之 A 为适 ψ DO.

3.3.2 适拟微分算子的特征

如本章开端所述, 线性偏微分算子 $P(x, D)$ 的特征为 $P(x, \xi)$. 显然有

$$P(x, \xi) = e^{-i(x, \xi)} P(x, D) e^{i(x, \xi)}$$

这个表达式启示我们, 可如下地定义适拟微分算子的特征.

定义3 设 A 为适 ψ DO, 称函数

$$\begin{aligned} \sigma_A(x, \xi) &= e^{-i(x, \xi)} A e^{i(y, \xi)} \\ &\equiv e^{-i(x, \xi)} \iint e^{i(x-y, \theta)} a(x, y, \theta) e^{i(y, \xi)} dy d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

为 A 的特征(或全特征).

命题1 设 A 为适 ψ DO, 则 $\sigma_A(x, \xi) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_n)$, 且对每个 $u \in C_0^\infty(X)$, 有

$$\begin{aligned} (Au)(x) &= \int \left[\int e^{i(x-y, \xi)} \sigma_A(x, \xi) u(y) dy \right] d\xi \\ &= \int e^{i(x, \xi)} \sigma_A(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

证 记 $f(x, \xi) = A(e^{i(y, \xi)})$, 须证 $f \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_n)$. 首先注意, 在 $C^\infty(X)$ 的拓扑意义下有

$$e^{i(y, \xi + \Delta \xi)} \rightarrow e^{i(y, \xi)} \quad (\xi \text{ 固定, } \Delta \xi \rightarrow 0)$$

因 A 为适 ψ DO, 据定理 1 知按 $C^\infty(X)$ 中拓扑有,

$$f(x, \xi + \Delta \xi) \rightarrow f(x, \xi) \quad (\xi \text{ 固定, } \Delta \xi \rightarrow 0),$$

故对每个 $\alpha \in N^*$, 有 $D_x^\alpha f(x, \xi) \in C(X \times \mathbb{R}_n)$.

同样, 依 $C^\infty(X)$ 中拓扑有

$$[f(x, \xi + \Delta \xi_j) - f(x, \xi)] \frac{-i}{\Delta \xi_j} \rightarrow D_{\xi_j} f(x, \xi)$$

$$(\xi \text{ 固定, } \Delta \xi_j \rightarrow 0)$$

且 $D_x^\alpha D_{\xi_j} f \in C(X \times \mathbb{R}_n)$. 依此类推, 知对任何指标组 α 及 β , 有 $D_x^\alpha D_{\xi_j}^\beta f \in C(X \times \mathbb{R}_n)$, 故 $f \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_n)$. 于是 $\sigma_A(x, \xi) = e^{-i(x, \xi)} f(x, \xi) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_n)$.

现在证明式(8). 由 3.1.2 式(3)知

$$\begin{aligned} Au &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint \tau(\varepsilon \theta) e^{i(x-y, \theta)} a(x, y, \theta) u(y) dy d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i(x-y, \theta)} \left[\tau(\varepsilon \theta) a(x, y, \theta) \int e^{i(y, \xi)} \widehat{u}(\xi) d\xi \right] dy d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint e^{i(x-y, \theta)} \tau(\varepsilon \theta) a(x, y, \theta) e^{i(y, \xi)} dy d\theta \widehat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

记

$$P_\varepsilon(x, \xi) = \iint e^{i(x-y, \theta)} \tau(\varepsilon \theta) a(x, y, \theta) e^{i(y, \xi)} dy d\theta,$$

有

$$Au = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int P_{\varepsilon}(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

容易得到估计:

$$\begin{aligned} & |P_{\varepsilon}(x, \xi)| \\ &= \left| \iint e^{i(x-y, \theta)} L_{y, \theta}^{\frac{1}{2}}[\tau(\varepsilon\theta)a(x, y, \theta)e^{i(y, \xi)}] dy d\theta \right| \\ &\leq C(1 + |\xi|)^l \end{aligned}$$

且常数 C 仅依赖于 $\text{supp } u$, 而与 ε 无关. 由这个估式及 $\widehat{u}(\xi)$ 的急降性知有

$$\begin{aligned} Au &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int P_{\varepsilon}(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi = \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_{\varepsilon}(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i(x-y, \theta)} \tau(\varepsilon\theta)a(x, y, \theta) \right. \\ &\quad \left. \cdot e^{i(y, \xi)} dy d\theta \right] \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int A(e^{i(y, \xi)}) \widehat{u}(\xi) d\xi = \int e^{i(x, \xi)} \sigma_A(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int \left[\int e^{i(x-y, \xi)} \sigma_A(x, \xi) u(y) dy \right] d\xi \end{aligned}$$

故(8)式成立.

注1 以后将证明, 当 $\rho > \delta$ 时, $\sigma_A \in S_{\rho, \delta}^m$. 于是(8)中的累次积分可视作振荡积分, 而 σ_A 为其振幅(具不含 y 的形式).

注2 由(7)及(8)知, σ_A 由适拟微分算子 A 所唯一确定, 并且 σ_A 对应于唯一的 A , 它以 σ_A 为符征, 且为适 ψ DO. 以后将进一步证明, 对每个 $b(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(X \times \mathbb{R}_n)$, $\rho > \delta$, 存在适拟微分算子 $B \in L_{\rho, \delta}^m(X)$, 使 $\sigma_B(x, \xi) \equiv b(x, \xi) \pmod{S^{-\infty}}$.

定义3' 设 $A \in L_{\rho, \delta}^m(X)$, A 不必是适 ψ DO. 若 A_1 为适 ψ DO, 且使 $A - A_1 \in L^{-\infty}(X)$, 则称 $\sigma_{A_1}(x, \xi)$ 为 A 的符征.

由定理3及3.2.3例3知定义3'中的 A_1 存在, 但非唯一的,

因而 A 的符征 σ_A 也不是唯一的。容易证明, A 的任二符征相差函数 $r(x, \xi) \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^n)$ 。事实上, 设 $A = A_j \in L^{-\infty}(X)$, A_j 为适 ψ DO, $j = 1, 2$, 则 $R = A_1 - A_2 \in L^{-\infty}(X)$, 且 R 为适 ψ DO。于是核 $K_R(x, y)$ 为具适合的 C^∞ 函数。故有:

$$\sigma_{A_1}(x, \xi) - \sigma_{A_2}(x, \xi) = e^{-i(x \cdot \xi)} \int K_R(x, y) e^{i(y \cdot \xi)} dy \quad (9)$$

且对每个紧集 $K \subset X$, 当 $x \in K$ 时, $K_R(x, y)$ 作为 y 的函数属于 $C_0^\infty(X)$ 。故(9)的右边作为 C_0^∞ 中函数的 Fourier 变换而关于 ξ 急降。由此知有

$$\sigma_{A_1}(x, \xi) - \sigma_{A_2}(x, \xi) \in S^{-\infty}(x, \xi)$$

定义4 设 $A \in L_{p, \delta}^m(X)$, $\sigma_A(x, \xi)$ 为 A 的全符征。若

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_A(x, t\xi) t^{-m} = \sigma_m(x, \xi)$$

存在, 即称 $\sigma_m(x, \xi)$ 为 A 的主符征。若点 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ 使

$$\sigma_m(x^0, \xi^0) = 0,$$

即称 (x^0, ξ^0) 为 A 的特征点。

易知 $\sigma_m(x, \xi)$ 关于 ξ 是正齐 m 次的。故 A 的特征点集组成 $X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ 中的闭锥集, 记为

$$\text{Char}(A) \equiv \{(x, \xi); \sigma_m(x, \xi) = 0, (x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)\}.$$

3.3.3. $S_{p, \delta}^m$ 中的渐近展式

定义5 设 $a(x, \theta) \in C^\infty(X \times \mathbb{R}_n)$ 。若有列 $a_j(x, \xi) \in S_{p, \delta}^{m_j}$, $j = 1, 2, \dots$, 当 $j \rightarrow \infty$ 时, $m_j \rightarrow -\infty$, 且对每个整数 $r \geq 2$, 有

$$a(x, \theta) - \sum_{j=1}^{r-1} a_j(x, \theta) \in S_{p, \delta}^{\bar{m}_r}(X \times \mathbb{R}_n), \quad \bar{m}_r = \max_{j \geq r} m_j,$$

即称 a 有渐近展式

$$a(x, \theta) \sim \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x, \theta).$$

容易由定义直接验证渐近展式的下列性质:

- 1) 若 $a \sim \sum_j a_j$, $b \sim \sum_j a_j$, 则 $a - b \in S^{-\infty}$; 反之, 若 $a \sim \sum_j a_j$, $a - b \in S^{-\infty}$, 则 $b \sim \sum_j a_j$.
- 2) 若 $a \sim \sum_j a_j$, 则 $a \in S_{p, 1, \delta}^{\bar{m}}$.
- 3) 若 $a \sim \sum_j a_j$, 设 $P(x, \xi, D_x, D_\xi)$ 是系数属 $S_{\delta}^{+\infty, \infty}(X \times \mathbb{R}_n)$ 的有限阶线性微分算子, 则 $Pa \sim \sum_j Pa_j$.
- 4) 若 $a \sim \sum_j a_j$, $a_j \sim \sum_k a_{jk}$, 则 $a \sim \sum_{j, k} a_{jk}$.
- 5) 若 $a \sim \sum_j a_j$, 设映射 $J: j = j(k) (k = 1, 2, \dots)$ 是正整数集到其自身的双射, 记 $b_k = a_{j(k)}$, 则 $a \sim \sum_k b_k$.
- 6) 设 $a \sim \sum_j a_j$. 记 $b_k = a_{r_{k-1}} + \dots + a_{r_k}$, $r_k > r_{k-1} \geq 1$, $k = 2, 3, \dots$, 则 $a \sim \sum_k b_k$.
- 7) 设 $a \sim \sum_j a_j$. 若 $\psi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$ 且 $1 - \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, 则

$$a \sim \sum_j \psi a_j.$$

定理5 给定 $a_j \in S_{\rho, \delta}^{m_j}(X \times \mathbb{R}_n)$, $j = 1, 2, \dots$, $m_j \rightarrow -\infty$ ($j \rightarrow \infty$), 则存在 $a(x, \xi)$, 使 $a \sim \sum_j a_j$.

证 不失一般性, 可认为 $m_1 > m_2 > \dots$, 否则由条件 $m_j \rightarrow -\infty$, 可合并第一项及随后的有限多项, 使剩下的各项所对应的阶 m_j 都小于 m_1 , 记合并而得的项为 b_1 ; 对剩下的项作同样的处理, 可依次得到 $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$, $b_k \in S_{\rho, \delta}^{m'_k}$, 且 $m'_{k+1} < m'_k$, $k = 1, 2, \dots$. 若能证明 $a \sim \sum_k b_k$, 由性质4)及5)知 $a \sim \sum_j a_j$.

其次, 还须证明一个预备性的结果. 设 $\{X_l\}$ 是 X 中的一列相对紧开集, 使 $\overline{X_l} \subset X_{l+1}$, $l = 1, 2, \dots$, 且 $\bigcup_l X_l = X$. 设 $\psi(\theta) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$, 当 $|\theta| \leq \frac{1}{2}$ 时, ψ 取值零; 当 $|\theta| > 1$ 时, $\psi \equiv 1$; 则存在一列数 $\{t_j\}$, $t_j > 1$, $j = 1, 2, \dots$, $t_j \rightarrow +\infty$ ($j \rightarrow +\infty$), 使当 $|\alpha| + |\beta| + l < j$ 时, 有

$$\left| D_\theta^\alpha D_x^\beta \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta) \right] \right| \leq \frac{1}{2^j} (1 + |\theta|)^{m_j - 1 - \rho(|\alpha| + 5|\beta|)}, \quad (10)$$

$$(x, \theta) \in \overline{X_l} \times \mathbb{R}_n \quad (11)$$

事实上, 因 $\psi\left(\frac{\theta}{t}\right)$ 关于 $t > 0$ 一致地属于 S^0 , 故当 $|\alpha| + |\beta| + l < j$

且(11)成立时, 可得:

$$\begin{aligned} & \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta) \right] \right| \\ & \leq C(\alpha, \beta, \bar{X}_t) (1 + |\theta|)^{m_j - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \\ & \leq C_j (1 + |\theta|)^{m_j - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \end{aligned}$$

其中 C_j 与 t_j 无关.

注意当 $m_j < m_{j-1}$ 且 $\frac{|\theta|}{t_j} \leq \frac{1}{2}$ 时, $\psi \equiv 0$, 故只须考虑 $|\theta| >$

$\frac{t_j}{2}$ 的情形. 于是有

$$\begin{aligned} & C_j (1 + |\theta|)^{m_j - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \\ & = C_j (1 + |\theta|)^{m_j - m_{j-1}} (1 + |\theta|)^{m_{j-1} - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \\ & \leq C_j \left(1 + \frac{t_j}{2}\right)^{m_j - m_{j-1}} (1 + |\theta|)^{m_{j-1} - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \end{aligned}$$

故只须选择 $t_j \geq \max[2(2^j C_j)^{\frac{1}{m_j - 1 - m_j}}, j]$ (这里要求 $t_j \geq j$, 是为了保证 $t_j \rightarrow +\infty$), 就可推到估计式(10).

现在令 $a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta)$, 其中 $t_j (j=1, 2, \dots)$

如上选定, 使(10)成立.

对每个 $R > 0$, 记 $\omega_R = \{\theta: |\theta| < R, \theta \in \mathbb{R}_n\}$, 则由 ψ 的选择知: 当 $\theta \in \omega_R$ 且 $t_j > 2R$ 时, 有 $\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) \equiv 0$. 故

$$a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{j_0(R)} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta), \quad (x, \theta) \in X \times \omega_R,$$

于是有

$$D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{j_0(R)} D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta) \right],$$

即 $a \in C^{\infty}(X \times \omega_R)$. 由 R 的任意性知 $a \in C^{\infty}(X \times \mathbf{R}_n)$, 且

$$D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j(x, \theta) \right],$$

$$(x, \theta) \in X \times \mathbf{R}_n.$$

下面证明渐近展式关系: $a \sim \sum_j a_j$. 为此只须证明当 $r \geq 2$

时, 有 $a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \in S_{\rho, \delta}^m$.

对每个紧集 $K \subset X$, 取 $l = l(K)$, 使 $X_l \supset K$. $l > r$. 于是当 $(x, \theta) \in K \times \mathbf{R}_n \subset X_l \times \mathbf{R}_n$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left(a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \right) \right| \\ &= \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \right] \right| \\ &\leq \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \left\{ \sum_{j=1}^{r-1} \left[\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) - 1 \right] a_j \right\} \right| \\ &+ \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \sum_{j=r}^{\infty} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j \right| \\ &+ \left| D_{\theta}^{\alpha} D_x^{\beta} \sum_{j>l} \psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) a_j \right| \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

因

$$\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) - 1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n) \subset S^{-\infty}, \text{ 故 } \sum_{j=1}^{r-1} \left(\psi\left(\frac{\theta}{t_j}\right) - 1\right) a_j \in S^{-\infty} \subset S_{\rho, \delta}^{m_r},$$

于是

$$I_1 \leq C_1(\alpha, \beta, K)(1 + |\theta|)^{m_r - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

由于 I_2 中和号内的每项属于 $S_{\rho, \delta}^{m_r}$, 且和为有限项, 故有

$$I_2 \leq C_2(\alpha, \beta, K)(1 + |\theta|)^{m_r - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

为估计 I_3 , 可利用估式(10), 并注意有

$$j > |\alpha| + |\beta| + l \geq l \geq r + 1, \quad m_{j-1} \leq m_r,$$

由此得

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \sum_{j: |\alpha| + |\beta| + l} \frac{1}{2^j} (1 + |\theta|)^{m_r - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \\ &< 2(1 + |\theta|)^{m_r - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \left| D_\theta^\alpha D_x^\beta \left(a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \right) \right| &\leq C(\alpha, \beta, K)(1 + |\theta|)^{m_r - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \\ (x, \theta) &\in K \times \mathbb{R}_n \end{aligned}$$

故确有 $a - \sum_{j=1}^{r-1} a_j \in S_{\rho, \delta}^{m_r}$, 即 $a \sim \sum_j a_j$.

注意, 对给定的如上的列 $\{a_j(x, \theta)\}$, 相应的 $a(x, \theta)$ 不是唯一的, 因由渐近展开式性质1)知, 当且仅当 $a' - a \in S^{-\infty}$ 时, $a' \sim \sum_j a_j$.

下述定理使 $a \sim \sum_j a_j$ 的检验过程简化.

定理6 设 $a_j \in S_{\rho, \delta}^{m_j}(X \times \mathbb{R}_n)$, $m_j \rightarrow -\infty$. 若 $a \in C^\infty(X \times$

R_n)满足下述两个条件:

(C_1) 对任一紧集 $K \subset X$ 及任意指标组 α, β , 存在常数 C 及 μ , 只与 α, β, K 有关, 使

$$|D_\theta^\alpha D_x^\beta a(x, \theta)| \leq C(1 + |\theta|)^\mu, \quad (x, \theta) \in K \times R_n. \quad (12)$$

(C_2) 对任一紧集 $K \subset X$, 存在数列 $C_l = C_l(K)$ 及 $\mu_l = \mu_l(K)$, $l = 1, 2, \dots$, $\mu_l \rightarrow -\infty (l \rightarrow +\infty)$, 使

$$\left| a(x, \theta) - \sum_{j=1}^{l-1} a_j(x, \theta) \right| \leq C_l (1 + |\theta|)^{\mu_l},$$

$$(x, \theta) \in K \times R_n, \quad (13)$$

则有 $a \sim \sum_j a_j$.

这个定理的意义在于: 只要导数 $D_\theta^\alpha D_x^\beta a$ 满足弱得多的估计式(12), 则不必对(13)左边的各阶导数进行估计, 只须对其本身验证估计式(13)就够了。这当然方便得多。

定理的证明依赖于下述引理的多维推广。

引理1 设 $f(t) \in C^2[-1, 1]$, 记

$$A_j = \sup_{|t| \leq 1} |f^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 2,$$

则有

$$|f'(0)|^2 \leq 4A_0(A_0 + A_2).$$

证 因

$$|f'(t) - f'(0)| \leq A_2 |t|$$

故当 $A_2 |t| \leq \frac{1}{2} |f'(0)|$, $|t| \leq 1$ 时, 有 $|f'(t)| \geq \frac{1}{2} |f'(0)|$.

记

$$B = \min \left\{ \frac{|f'(0)|}{2A_2}, 1 \right\}$$

则当 $t \in [-B, B]$ 时, 有 $|f'(t)| \geq \frac{1}{2}|f'(0)|$. 于是

$$\begin{aligned} 2A_0 &\geq |f(B) - f(-B)| = |f'(\tau)[B - (-B)]| \\ &\geq \frac{1}{2}|f'(0)|2B = B|f'(0)| \end{aligned}$$

注意当 $f'(0) = 0$ 时, 显然有

$$|f'(0)|^2 \leq 4A_0(A_0 + A_2)$$

而当 $f'(0) \neq 0$ 时, 有

$$|f'(0)| \leq \frac{2A_0}{B} = 2A_0 \max\left\{\frac{2A_2}{|f'(0)|}, 1\right\},$$

故或 $|f'(0)| \leq \frac{4A_0A_2}{|f'(0)|}$, 或 $|f'(0)| \leq 2A_0$. 总之有

$$|f'(0)|^2 \leq 4A_0(A_0 + A_2).$$

引理2 设 K_1 及 K_2 是 \mathbb{R}^p 中的两个紧集, 且 K_1 含于 K_2 的内部, $K_1 \subset \text{int}K_2$, 则存在常数 $C > 0$, 对任一在 K_2 的某邻域中具二阶连续偏导数的函数 $f(x)$, 有

$$\begin{aligned} &\left(\sup_{K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f|\right)^2 \\ &\leq C \sup_{K_2} |f(x)| \left[\sup_{K_2} |f(x)| + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right] \quad (13') \end{aligned}$$

证 因 K_1 含于 K_2 的内部, 故紧集 K_1 与集 $\mathbb{R}^p \setminus K_2$ 的闭包有正距离 $r > 0$. 对 K_1 上每点 x^0 , 作半径为 r 的球邻域 $\omega_r(x^0)$, 则 $\omega_r(x^0) \subset K_2$, 且 $\omega_r(x^0)$ 中每点 x 可表示为 $x = x^0 + tr\xi$, $|t| \leq 1$, $|\xi| = 1$, $t \in \mathbb{R}^1$, $\xi \in \mathbb{R}^p$. 令

$$g(t) = f(x^0 + t\xi r), \quad |t| \leq 1,$$

把引理1应用于 $g(t)$, 并注意

$$g'(t) = \sum_{j=1}^p r \xi_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x^0 + tr\xi),$$

$$g''(t) = \sum_{i,j=1}^p r^2 \xi_i \xi_j \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x^0 + tr\xi),$$

可得

$$\begin{aligned} r^2 \left| \sum_{j=1}^p \xi_j \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j} \right|^2 &\leq 4 \sup_{|t| \leq 1} |f(x^0 + tr\xi)| \\ &\times \left\{ \sup_{|t| \leq 1} |f(x^0 + tr\xi)| \right. \\ &\left. + r^2 \sup_{|t| \leq 1} \left| \sum_{i,j=1}^p \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) (x^0 + tr\xi) \xi_i \xi_j \right| \right\} \\ &\leq 4 \sup_{K_2} |f(x)| \left\{ \sup_{K_2} |f(x)| + r^2 \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f(x)| \right\}. \end{aligned}$$

记

$$e^{(l)} = (\delta_{1l}, \dots, \delta_{pl}), \quad l = 1, \dots, p,$$

其中 δ_{jl} 为 Kronecker 记号, $\delta_{jl} = \begin{cases} 1, & \text{当 } j=l \\ 0, & \text{当 } j \neq l \end{cases}$. 取 $\xi = e^{(l)}$,

有

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(x^0)}{\partial x_l} \right| &\leq \left\{ 4 \sup_{K_2} |f(x)| \left[\frac{1}{r^2} \sup_{K_2} |f(x)| \right. \right. \\ &\left. \left. + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad l = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

由此得

$$\left(\sup_{K_1} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha f| \right)^2$$

$$\leq 4p^2 \sup_{K_2} |f(x)| \left[\frac{1}{r^2} \sup_{K_2} |f(x)| + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right]$$

$$\leq C \sup_{K_2} |f| \left[\sup_{K_2} |f| + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha f| \right]$$

其中 $C = 4p^2 \max\left(\frac{1}{r^2}, 1\right)$.

现在证明定理6. 由定理5及渐近展式的性质1)知, 存在 $b \in S_{\rho, \delta}^{\bar{m}_1}$, 使 $b \sim \sum_j a_j$. 记 $d = a - b$, 若能证 $d \in S^{-\infty}$, 则显然有 $a \sim \sum_j a_j$.

由 $b \in S_{\rho, \delta}^{\bar{m}_1}$ 及条件 (C_1) , 知存在仅依赖于 α, β, K 的常数 C 及 μ , 使

$$|D_x^\alpha D_\theta^\beta d(x, \theta)| \leq C(1 + |\theta|)^\mu, \quad (x, \theta) \in K \times \mathbb{R}_n. \quad (14)$$

另一方面, 由条件 (C_2) 及显然的关系

$$a - b = \left(a - \sum_{j=1}^{l-1} a_j \right) - \left(b - \sum_{j=1}^{l-1} a_j \right)$$

可得

$$|d(x, \theta)| \leq C_l(K)(1 + |\theta|)^{\mu_l(K)} + C_l'(K)(1 + |\theta|)^{\bar{m}_l},$$

故有

$$|d(x, \theta)| \leq C_l''(K)(1 + |\theta|)^{\nu_l(K)}, \quad (x, \theta) \in K \times \mathbb{R}_n, \quad (15)$$

其中 $\nu_l(K) = \max(\mu_l(K), \bar{m}_l) \rightarrow -\infty \quad (l \rightarrow +\infty)$. 记

$$d_\theta(x, \xi) = d(x, \theta + \xi),$$

显然有

$$D_{\xi}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d_{\theta}(x, \xi)|_{\xi=0} = D_{\theta}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d(x, \theta),$$

取 $K_1 = K \times \{0\}$, $K_2 = \widehat{K} \times \{\xi: |\xi| < 1\}$, \widehat{K} 为 X 中紧集, 而使 $K \subset \text{int} \widehat{K}$. 据引理 2 及估计式 (15), 可得

$$\begin{aligned} & \left(\sup_{K_1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} |D_{\xi}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d(x, \theta)| \right)^2 \\ & \leq \left(\sup_{K_1} \sum_{|\alpha|+|\beta|=1} |D_{\xi}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d_{\theta}(x, \xi)| \right)^2 \\ & \leq C_0(K) \sup_{K_2} |d_{\theta}(x, \xi)| \left[\sup_{K_2} |d_{\theta}(x, \xi)| \right. \\ & \quad \left. + \sup_{K_2} \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} |D_{\xi}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d_{\theta}(x, \xi)| \right] \\ & \leq C_0(K) C_1^{\nu_1}(K) (1 + |\theta + \xi|)^{\nu_1(K)} [C_1^{\nu_1}(1 \\ & \quad + |\theta + \xi|)^{\nu_1(K)} + C(K) (1 + |\theta + \xi|)^{\mu(K)}]. \end{aligned}$$

由于 $|\xi| = 1$, 故有

$$\frac{1}{2}(1 + |\theta|) \leq 1 + |\theta + \xi| \leq 2(1 + |\theta|),$$

于是当 $|\alpha + \beta| = 1$ 时, 得如下估计

$$|D_{\theta}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d(x, \theta)| \leq C_1(K) (1 + |\theta|)^{\nu_1'(K)}, \quad (x, \theta) \in K \times \mathbb{R}_n, \quad (16)$$

其中 $\nu_1'(K) \rightarrow -\infty (l \rightarrow +\infty)$. 因此, 对任何实数 m , 只要 l 充分大, 可使

$$|D_{\theta}^{\alpha} D_{\theta}^{\beta} d(x, \theta)| \leq C(\alpha, \beta, K) (1 + |\theta|)^{m - \mu|\alpha| + \mu|\beta|}, \quad (17)$$

$$|\alpha + \beta| = 1, (x, \theta) \in K \times \mathbb{R}_n,$$

当 $|\alpha + \beta| = 2$ 时, 重复应用上述讨论, 这时代替 (15) 而利用 (16), 又可得形如 (16) 及 (17) 的估计式. 依此类推, 知 (17) 对所

有的 α 及 β 成立. 故 $d \in S_{\rho-\delta}^m$. 由 m 的任意性知 $d \in S^{-\infty}$. 定理证毕.

3.3.4 用振幅表示适拟微分算子的特征

由此以下假定 ρ 及 δ 满足要求 $0 \leq \delta < \rho \leq 1$.

定理7 设 A 为以 $a \in S_{\rho, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$ 作振幅的适 Ψ DO, 则 A 的符征 $\sigma_A(x, \xi)$ 有渐近展式

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} a(x, y, \xi) |_{y=x}, \quad (18)$$

$$\partial_{\xi}^{\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)^{\alpha_n},$$

$$D_y^{\alpha} = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y_n} \right)^{\alpha_n}.$$

注3 因 $\partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} a |_{y=x} \in S_{\rho, \delta}^{m-(\rho-\delta)|\alpha|}$, 而 $\rho - \delta > 0$, 故

$$m_{\alpha} \equiv m - (\rho - \delta)|\alpha| \rightarrow -\infty \quad (|\alpha| \rightarrow +\infty),$$

因此, (18)符合渐近展式的要求. 这也表明有必要作 $\delta < \rho$ 的假定.

证 首先可注意, 若(18)对 A 的适振幅 a 成立, 则对 A 的任一振幅 a' 仍成立. 事实上, 因对角集 $\Delta \equiv \{(x, y) \in X \times X, y = x\}$ 含于 $\text{sing supp } K_A$, 随之也含于适集 $\text{supp } K_A$ 中. 据定理2及其证明, 知存在具适合的函数 $\tau(x, y)$, 在 $\text{supp } K_A$ 的某个邻域中恒等于1, 使 $\tau a'$ 为 A 的适振幅. 于是

$$\begin{aligned} \sigma_A(x, \xi) &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} (\tau a') |_{y=x} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} a' |_{y=x}. \end{aligned}$$

由此得知, 只须对 A 的适振幅 a 证明式(18).

据适振幅的定义知：当 x 限制于紧集 K 上时， $a(x, y, \xi)$ 作为 y 的函数具紧台 K' ，且 K' 只依赖于 K ，而与 θ 无关。故 σ_A 可表示为：

$$\sigma_A(x, \xi) = \iint a(x, y, \theta) e^{i(x-y, \theta)} e^{i(y-x, \xi)} dy d\theta. \quad (19)$$

上式当 $x \in K$ 时，关于 y 的积分沿紧集 K' 进行。

注意集合 $K'' = \{z, z = y - x, x \in K, y \in K'\}$ 为紧集，因此可改写(19)如下：

$$\begin{aligned} \sigma_A(x, \xi) &= \iint e^{-i(y-x, \theta-\xi)} a(x, y, \theta) dy d\theta \\ &= \iint e^{-i(z, \eta)} a(x, x+z, \xi+\eta) dz d\eta \\ &= \iint [(1-\Delta_z)^l e^{-i(z, \eta)}] (1+|z|^2)^l \\ &\quad \times a(x, x+z, \xi+\eta) dz d\eta, \end{aligned}$$

其中 $\eta = \theta - \xi$ ， $\Delta_z = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j^2}$ 。易知有：

$$\begin{aligned} &|D_\xi^\alpha D_\xi^\beta (1-\Delta_z)^l a(x, x+z, \xi+\eta)| \\ &\leq C(\alpha, \beta, l, K) (1+|\xi+\eta|)^{m-\rho(\alpha)+\delta(\beta)+2l} \quad (20) \\ &x \in K, z \in K'', \xi, \eta \in \mathbb{R}_n. \end{aligned}$$

由(20)及明显的初等不等式

$$\begin{aligned} (1+|\eta|^2)^{-l} &\leq 2^l (1+|\eta|)^{-2l} \\ &\leq 2^l (1+|\xi|)^{2l} (1+|\xi+\eta|)^{-2l} \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} &|D_\xi^\alpha D_\xi^\beta \sigma_A(x, \xi)| \leq C_1(\alpha, \beta, l, K) (1+|\xi|)^{2l} \\ &\quad \times \int (1+|\xi+\eta|)^{m-\rho(\alpha)+\delta(\beta)-1(1-\delta)} d\eta. \end{aligned}$$

取 $l \geq \frac{m+n+1-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}{1-\delta}$, 注意到 $(1+|\xi+\eta|) \geq \frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}$,

有

$|D_{\xi}^{\alpha} D_z^{\beta} \sigma_A(x, \xi)| \leq C(\alpha, \beta, K)(1+|\xi|)^{\mu(\alpha, \beta, K)}, x \in K$,
其中 $\mu = 2l + n + 1$. 故 σ_A 满足定理 6 的条件 (C_1) .

另一方面, 由 Taylor 公式知

$$\begin{aligned} \sigma_A(x, \xi) &= \iint e^{-i(z, \eta)} a(x, x+z, \xi+\eta) dz d\eta \\ &= \iint e^{-i(z, \eta)} \left[\sum_{|\alpha| \leq N-1} \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a(x, x+z, \xi) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha| = N} \frac{N \eta^{\alpha}}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_{\xi}^{\alpha} a(x, x+z, \xi+t\eta) dt \right] dz d\eta \\ &= I_N + R_N. \end{aligned}$$

利用分部积分, 改写 I_N 如下形:

$$\begin{aligned} I_N &\equiv \sum_{|\alpha| \leq N-1} \iint e^{-i(z, \eta)} \frac{\eta^{\alpha}}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} a(x, x+z, \xi) dz d\eta \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \iint e^{-i(z, \eta)} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_z^{\alpha} a(x, x+z, \xi) dz d\eta. \end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned} &\int e^{-i(z, \eta)} \partial_{\xi}^{\alpha} D_z^{\alpha} a(x, x+z, \xi) dz \\ &= F_z[\partial_{\xi}^{\alpha} D_z^{\alpha} a(x, x+z, \xi)], \end{aligned}$$

这里 F_z 表示关于 z 的 Fourier 变换, 故有

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{|\alpha| \leq N} \left\{ \int e^{i(z, \eta)} \frac{1}{\alpha!} F_z[\partial_{\xi}^{\alpha} D_z^{\alpha} a(x, x+z, \xi)] d\eta \right\}_{z=0} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq N} \left\{ \frac{1}{\alpha!} F_z^{-1} F_z[\partial_{\xi}^{\alpha} D_z^{\alpha} a(x, x+z, \xi)] \right\}_{z=0} \end{aligned}$$

$$= \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_{\eta}^{\alpha} a(x, y, \xi) |_{y=x}.$$

于是得

$$\sigma_A(x, \xi) - \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_{\eta}^{\alpha} a(x, y, \xi) |_{y=x} = R_N \quad (21)$$

记 $G_1 = \left\{ \eta : |\eta| \leq \frac{1}{2} |\xi|, \eta \in \mathbb{R}_n \right\}$

$$G_2 = \left\{ \eta : |\eta| > \frac{1}{2} |\xi|, \eta \in \mathbb{R}_n \right\}$$

把 R_N 的积分域分为 $K'' \times G_1$ 及 $K'' \times G_2$, 这里 K'' 为对 z 的积分域, 相应得 $R_N = R_N^{(1)} + R_N^{(2)}$. 下面分别对这两项进行估计.

$$\begin{aligned} |R_N^{(1)}| &= \left| \sum_{|\alpha| < N} \frac{N}{\alpha!} \iint_{K'' \times G_1} \int_0^1 e^{-t(z, \eta)} \eta^{\alpha} \partial_{\xi}^{\alpha} \right. \\ &\quad \left. \times a(x, x+z, \xi+t\eta)(1-t)^N dt dz d\eta \right| \\ &= \left| \sum_{|\alpha| < N} \frac{N}{\alpha!} \iint_{K'' \times G_1} \int_0^1 e^{-t(z, \eta)} \partial_{\xi}^{\alpha} D_{\eta}^{\alpha} \right. \\ &\quad \left. \times a(x, x+z, \xi+t\eta)(1-t)^N dt dz d\eta \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha| < N} \frac{N}{\alpha!} C(\alpha, K) \int \int_{G_1 K''} (1 + |\xi + t_1 \eta|)^{m - (\rho - \delta) + |\alpha|} dz d\eta, \\ &\quad t_1 \in (0, 1) \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} |R_N^{(1)}| &\leq C_N(K) \int_{|\eta| \leq |\xi|/2} (1 + |\xi + t_1 \eta|)^{m - N(\rho - \delta)} d\eta, \\ &\quad x \in K, t_1 \in (0, 1) \end{aligned}$$

当 $|\eta| \leq \frac{|\xi|}{2}$ 时, 有

$$\frac{1}{2}(1 + |\xi|) \leq 1 + |\xi + t_1 \eta| \leq 2(1 + |\xi|)$$

且以 $\frac{|\xi|}{2}$ 为半径的球体积具阶 $V_n |\xi|^n$, V_n 为只依赖于 n 的常数, 由此知

$$|R_N^{(1)}| \leq C'_N(K)(1 + |\xi|)^{m+n-N(\rho-\delta)}, \quad x \in K. \quad (22)$$

为估计 $R_N^{(2)}$, 先考虑积分:

$$\begin{aligned} |J_a| &= \left| \iint_{K' \times G_2} e^{-t(z, \eta)} \eta^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, x+z, \xi+t\eta) dz d\eta \right| \\ &= \left| \iint_{K'' \times G_2} e^{-t(z, \eta)} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, x+z, \xi+t\eta) dz d\eta \right| \\ &= \left| \int_{G_2} \int_{K''} e^{-t(z, \eta)} (1 + |\eta|^2)^{-l} \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \Delta_x)^l \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha a(x, x+z, \xi+t\eta) dz d\eta \right| \\ &\leq \int_{|\eta| > |\xi|/2} C(\alpha, l, K)(1 + |\eta|)^{-2l} \\ &\quad \times (1 + |\xi + t\eta|)^{m - (\rho - \delta) + \alpha + 2l\delta} d\eta. \end{aligned}$$

当 $|\eta| > \frac{|\xi|}{2}$ 时, $(1 + |\xi + t\eta|) \leq 3(1 + |\eta|)$, 记 $p_N = \max(m - (\rho - \delta)N, 0)$ 有:

$$\begin{aligned} |J_a| &\leq \int_{G_2} C_1(\alpha, l, K)(1 + |\eta|)^{-2l(1-\delta) + p_N} d\eta \\ &\leq C_2(\alpha, l, K)(1 + |\xi|)^{-2l(1-\delta) + p_N + n + 1}. \end{aligned}$$

取 $l = l(N)$ 充分大, 使

$$\begin{aligned} & -2l(1-\delta) + p_N + n + 1 \\ & \leq \min(m+n-N(\rho-\delta), 0) \end{aligned}$$

即有:

$$\begin{aligned} |R_N^{(2)}| &= \left| \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 f_\alpha (1-t)^N dt \right| \\ &\leq C_N(K) (1+|\xi|)^{m+n-N(\rho-\delta)}, \quad x \in K \end{aligned} \quad (23)$$

结合(21)、(22)及(23), 得

$$\begin{aligned} & \left| \sigma_A(x, \xi) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_y^\alpha a(x, y, \xi) \Big|_{y=x} \right| \\ & \leq C_N(K) (1+|\xi|)^{\mu_N}, \quad x \in K, \end{aligned}$$

其中 $\mu_N = m+n-N(\rho-\delta) \rightarrow -\infty (N \rightarrow +\infty)$. 故定理 6 中条件 (C_2) 也成立. 于是定理 7 得证.

推论 1 设 $A \in L_{\rho, \delta}^m(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 则 $\sigma_A(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$, 且对每个 $b(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$, 存在适拟微分算子 $B \in L_{\rho, \delta}^m$, 使 $\sigma_B(x, \xi) \equiv b(x, \xi) \pmod{S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}_n)}$.

3.3.5 拟微分算子的转置与合成

如前所述, 拟微分算子 A 的转置 ${}^t A$ 由下式确定

$$(Au, v) = (u, {}^t Av), \quad \forall u, v \in C_0^\infty(X).$$

这里 $(\varphi, \psi) = \int_X \varphi \psi dx$, $\varphi, \psi \in C^\infty(X)$, 且至少有一属 $C_0^\infty(X)$.

A 的伴算子 A^* 则由如下的内积关系确定:

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle, \quad \forall u, v \in C_0^\infty(X).$$

这里 $\langle \varphi, \psi \rangle = \int \overline{\varphi} \psi dx$, 而与 (φ, ψ) 有所不同.

设 $A = O_p(a)$, $a(x, y, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$. 容易算出

$$({}^t A v)(y) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} a(x, y, \xi) v(x) dx d\xi.$$

类似地可算出

$$(A^* v)(y) = \iint e^{-i(x-y \cdot \xi)} \bar{a}(x, y, \xi) v(x) dx d\xi,$$

或由 A 的特征 $\sigma_A(x, \xi)$ 表示式(8)

$$(A u)(x) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \sigma_A(x, \xi) u(y) dy d\xi \quad (8)$$

得 ${}^t A$ 及 A^* 的如下表示

$$({}^t A v)(y) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \sigma_A(x, \xi) v(x) dx d\xi; \quad (24)$$

$$(A^* v)(y) = \iint e^{-i(x-y \cdot \xi)} \overline{\sigma_A(x, \xi)} v(x) dx d\xi. \quad (25)$$

在(24)中互换 x 及 y , 并换 ξ 为 $-\xi$, 得标准表示,

$$({}^t A v)(x) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \sigma_A(y, -\xi) v(y) dy d\xi. \quad (24')$$

同样, 在(25)中互换 x 及 y , 得标准表示

$$(A^* v)(x) = \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \overline{\sigma_A(y, \xi)} v(y) dy d\xi. \quad (25')$$

定理8 设 A 为适 Ψ DO, 其特征为 $\sigma_A(x, \xi)$. 记 ${}^t A$ 的特征为 $\sigma_{{}^t A}$, A^* 的特征为 σ_{A^*} , 则有

$$\sigma_{{}^t A}(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} \partial_\xi^a D_x^a \sigma_A(x, -\xi), \quad (26)$$

$$\sigma_{A^*}(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} \partial_\xi^a D_x^a \overline{\sigma_A(x, \xi)}. \quad (27)$$

证 这时 ${}^t A$ 及 A^* 都是适 Ψ DO, 且由(24')及(25')知 ${}^t A$ 的振幅是 $\sigma_A(y, -\xi)$, A^* 的振幅是 $\overline{\sigma_A(y, \xi)}$. 应用定理7, 即得渐近展式(26)及(27).

为了以后的需要, 还得引进适拟微分算子 A 的对偶算子 \widehat{A} 及 σ_A 的对偶特征 $\widehat{\sigma}_A$.

设 A 为适 Ψ DO, 其特征为 $\sigma_A(x, \xi)$. 先定义 σ_A 的对偶特征 $\widehat{\sigma}_A$ 如下

$$\widehat{\sigma}_A(x, \xi) = \sigma_{t_A}(x, -\xi),$$

由(26)可得下述结果.

定理9 对偶特征 $\widehat{\sigma}_A(x, \xi)$ 具渐近展式

$$\widehat{\sigma}_A(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} (-\partial_\xi)^a D_x^a \sigma_A(x, \xi). \quad (28)$$

对偶特征的作用可由下述命题看出.

命题2 设 A 为适 Ψ DO, $u \in C_0^\infty(X)$, 则 Au 的 Fourier 变换 $F[Au]$ 可表示为

$$F[Au](\xi) = \iint e^{i(y \cdot \eta - \xi)} \widehat{\sigma}_A(y, \xi) \widehat{u}(\eta) dy d\eta. \quad (29)$$

证 因 $t(tA) = A$, 据(24')有

$$\begin{aligned} (Au)(x) &= \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \sigma_{t_A}(y, -\xi) u(y) dy d\xi \\ &= \int e^{i(x \cdot \xi)} \left[\int e^{-i(y \cdot \xi)} \sigma_{t_A}(y, -\xi) u(y) dy \right] d\xi \\ &= F^{-1} \left[\int e^{-i(y \cdot \xi)} \widehat{\sigma}_A(y, \xi) u(y) dy \right](x), \end{aligned}$$

由此得

$$F[Au](\xi) = \int e^{-i(y \cdot \xi)} \widehat{\sigma}_A(y, \xi) u(y) dy. \quad (30)$$

把 $u(y) = \int e^{i(y \cdot \eta)} \widehat{u}(\eta) d\eta$ 代入(30), 即得(29).

现在定义适拟微分算子 A 的对偶算子 \widehat{A} 为 $C_0^\infty(X)$ 到其自身的线性映射, 使得

$$\widehat{A}[Fu] = F[Au], \quad \forall u \in C_0^\infty(X), \quad (31)$$

由(29)知, 对每个 $v(\eta) \in C_0^\infty(X)$, 有

$$(\widehat{A}v)(\xi) = \iint e^{i(y \cdot \eta - \xi \cdot \eta)} \sigma_A(y, \xi) \widehat{v}(\eta) dy d\eta. \quad (32)$$

定理10 设 A 及 B 都是适 ψ DO, $A \in L_{\rho, \delta}^{m_1}(X)$, $B \in L_{\rho, \delta}^{m_2}(X)$. 记 $C = B \circ A$; $Cu = B[Au]$, $\forall u \in C_0^\infty(X)$, 则 C 也是适 ψ DO, 且 $C \in L_{\rho, \delta}^{m_1 + m_2}(X)$, 相应的特征间具关系:

$$\sigma_{B \circ A}(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} \partial_\xi^a \sigma_B(x, \xi) D_x^a \sigma_A(x, \xi). \quad (33)$$

证 利用(30), 可得

$$\begin{aligned} Cu &= B(Au) = \int e^{i(x \cdot \xi - t)} \sigma_B(x, \xi) (\widehat{Au})(\xi) d\xi \\ &= \int e^{i(x \cdot \xi)} \sigma_B(x, \xi) \left[\int e^{-i(y \cdot \xi)} \widehat{\sigma}_A(y, \xi) u(y) dy \right] d\xi \\ &= \iint e^{i(x - y \cdot \xi)} \sigma_B(x, \xi) \widehat{\sigma}_A(y, \xi) u(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (34)$$

因 $\sigma_B(x, \xi) \widehat{\sigma}_A(y, \xi) = \sigma_B(x, \xi) \sigma_{\sharp A}(y, -\xi) \in S_{\rho, \delta}^{m_1 + m_2}(X \times X \times R_n)$, 故由上式知 $C \in L_{\rho, \delta}^{m_1 + m_2}(X)$. 又由显然的关系式 $\sharp C = \sharp A \circ \sharp B$ 以及定理4, 知 C 为适 ψ DO. 剩下须证明渐近展式(33).

由(34)知 C 有振幅 $\sigma_B(x, \xi) \widehat{\sigma}_A(y, \xi)$. 于是据定理7、定理9以及3.3.3中所列举的渐近展式的性质, 可得如下结果(约定

$\sum_j a_j \sim \sum_j b_j$ 表示它们是同一函数的渐近展式):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{B \circ A}(x, \xi) &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} D_y^{\alpha} [\sigma_B(x, \xi) \widehat{\sigma}_A(y, \xi)]|_{y=x} \\
 &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\xi}^{\alpha} [\sigma_B(x, \xi) D_x^{\alpha} \widehat{\sigma}_A(x, \xi)] \\
 &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\beta! \gamma! \delta!} \partial_{\xi}^{\alpha} [\sigma_B(x, \xi) (-\partial_{\xi})^{\beta} D_x^{\alpha+\beta} \sigma_A(x, \xi)] \\
 &= \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma, \delta \\ \gamma+\delta=\alpha}} \frac{1}{\beta! \gamma! \delta!} [\partial_{\xi}^{\gamma} \sigma_B(x, \xi)] [(-\partial_{\xi})^{\beta} \partial_{\xi}^{\delta} D_x^{\alpha+\beta} \sigma_A(x, \xi)] \\
 &= \sum_{\beta, \gamma, \delta} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta! \gamma! \delta!} [\partial_{\xi}^{\gamma} \sigma_B] [\partial_{\xi}^{\beta+\delta} D_x^{\beta+\gamma+\delta} \sigma_A],
 \end{aligned}$$

或

$$\sigma_{B \circ A}(x, \xi) \sim \sum_{\gamma} \frac{1}{\gamma!} \sum_k \left(\sum_{\beta+\delta=k} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta! \delta!} \right) [\partial_{\xi}^{\gamma} \sigma_B] \partial_{\xi}^k D_x^{k+\gamma} \sigma_A. \quad (35)$$

记

$$\begin{aligned}
 (x+y)^k &\equiv (x_1+y_1)^{k_1} (x_2+y_2)^{k_2} \cdots (x_n+y_n)^{k_n}, \\
 k &= (k_1, \dots, k_n).
 \end{aligned}$$

在公式

$$(x+y)^k = \sum_{\beta+\delta=k} \frac{k!}{\beta! \delta!} x^{\delta} y^{\beta}$$

中取 $x = -y = (1, 1, \dots, 1) = e$, 可得

$$\sum_{\beta+\delta=k} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta! \delta!} = \frac{1}{k!} (e - e)^k = \frac{1}{k!} \begin{cases} 1, & k = (0, \dots, 0); \\ 0, & k \neq (0, \dots, 0); \end{cases}$$

代入(35), 即得渐近展式(33).

推论2 设 $A \in L_{\rho, \delta}^{m_1}(X)$, $B \in L_{\rho, \delta}^{m_2}(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 B 为适 ψ DO, 则算子 $A \circ B$ 及算子 $B \circ A$ 都属于 $L_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}$, 并映 $C_0^\infty(X)$ 到 $C^\infty(X)$.

证 先对 $A \in L^{-\infty}(X)$ 的特殊情形证明 $A \circ B$ 及 $B \circ A$ 都属于 $L^{-\infty}(X)$. 事实上, 因 $A \in L^{-\infty}(X)$, 故 A 为具 C^∞ 光滑核的积分算子, 而有:

$$Au = \int K_A(y, z) u(z) dz, \quad K_A \in C^\infty(X \times X), u \in C_0^\infty(X).$$

于是

$$(B \circ A)u = \iint e^{i(x-y, \xi)} b(x, y, \xi) \left[\int K_A(y, z) u(z) dz \right] dy d\xi,$$

其中 $b(x, y, \xi)$ 为 B 的适振幅. 当 x 在紧集上变动时, 关于 y 的积分域也是紧集. 利用振荡积分正规化的等价定义(见3.1.2式(3)), 有

$$\begin{aligned} B \circ Au &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{i(x-y, \xi)} \tau(\varepsilon \xi) b(x, y, \xi) \\ &\quad \times \left[\int K_A(y, z) u(z) dz \right] dy d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left[\iint e^{i(x-y, \xi)} \tau(\varepsilon \xi) b(x, y, \xi) \right. \\ &\quad \left. \times K_A(y, z) dy d\xi \right] u(z) dz \\ &= \int \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\iint e^{i(x-y, \xi)} \tau(\varepsilon \xi) b(x, y, \xi) \right. \\ &\quad \left. \times K_A(y, z) dy d\xi \right] u(z) dz \\ &= \int \left[\iint e^{i(x-y, \xi)} b(x, y, \xi) K_A(y, z) dy d\xi \right] u(z) dz. \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} C(x, z) &= \iint e^{i(x-y, \xi)} b(x, y, \xi) K_A(y, z) dy, \xi \\ &\equiv B[K_A(y, z)] \end{aligned}$$

仿照3.3.2命题1的证明, 知 $C(x, z) \in C^\infty(X \times X)$, 故 $B \circ A$ 为具 C^∞ 光滑核的积分算子, 于是 $B \circ A \in L^{-\infty}(X)$. 又因 $A \circ B = {}^t(B^t \circ A)$, 故也有 $A \circ B \in L^{-\infty}(X)$.

现在考虑一般情形. 据3.3.1定理3知 A 可分解为 $A = A_1 + A_2$, 其中 A_1 为适 ψ DO, $A_2 \in L^{-\infty}(X)$. 于是 $B \circ A = B \circ A_1 + B \circ A_2$. 由定理10上面及上面已证得的结果, 知 $B \circ A_2 \in L^{-\infty}$, $B \circ A_1 \in L_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}$, 故 $B \circ A \in L_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}(X)$. 同理可证明 $A \circ B \in L_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}(X)$.

3.3.6 经典拟微分算子

定义6 若拟微分算子 A 的符征 $\sigma_A(x, \xi)$ 具如下性质的渐近展式

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j}(x, \xi) \quad (\text{对大的} |\xi|), \quad (36)$$

其中 a_{m-j} 关于大的 $|\xi|$ 为正齐 $m-j$ 次函数, $j=0, 1, \dots$ 则称 σ_A 为经典符征, 记作 $\sigma_A \in CS^m(X \times \mathbb{R}_n)$, 并称 A 为经典 ψ DO, 记作 $A \in CL^m(X)$.

注4 所谓“对大的 $|\xi|$ 有 $a \sim \sum_j a_j$ ”, 指的是: 存在 $\psi \in$

$C^\infty(\mathbb{R}_n)$, 当 $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ 时, $\psi(\xi) \equiv 0$; 当 $|\xi| > 1$ 时, $\psi(\xi) \equiv 1$, 使

$$a(x, \xi) \sim \sum_j \psi(\xi) a_j(x, \xi) \quad (37)$$

容易验证下述命题.

命题3 a) 若 $A \in CL^m(X)$, 则 A 的主符征 $\sigma_A^{(m)}(x, \xi)$ 存在: $\sigma_A^{(m)}(x, \xi) = a_m(x, \xi)$, a_m 是渐近展式(36)中的首项;

b) 若 A_1 及 A_2 都是适 ψ DO, 且 $A_j \in CL^{m_j}(X)$, $j = 1, 2$, 则 $A_1 \circ A_2 \in CL^{m_1+m_2}(X)$, 且其主符征 $\sigma_{A_1 \circ A_2}^{(m_1+m_2)} = \sigma_{A_1}^{(m_1)} \cdot \sigma_{A_2}^{(m_2)}$;

c) 设 $A \in CL^m(X)$, 则 A 及 A^* 也属于 $CL^m(X)$.

3.4. 变量代换与流形上的拟微分算子

3.4.1 拟微分算子的变量代换

设给定由域 $X \subset \mathbb{R}^n$ 到域 $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ 的微分同胚 $\kappa: X \rightarrow X_1$, 它引出拖射

$$\kappa^*: C^\infty(X_1) \rightarrow C^\infty(X): u \rightarrow u \circ \kappa,$$

κ^* 作成同构, 并映 $C_0^\infty(X_1)$ 到 $C_0^\infty(X)$. 设 A 为 X 中的 ψ DO, 用下面的可换图定义算子 $A_1: C_0^\infty(X_1) \rightarrow C^\infty(X_1)$:

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(X) & \xrightarrow{A} & C^\infty(X) \\ \uparrow \kappa^* & & \uparrow \kappa^* \\ C_0^\infty(X_1) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(X_1) \end{array}$$

有 $\kappa^* A_1 u = A \kappa^* u = A(u \circ \kappa)$, 即 $(A_1 u) \circ \kappa = A(u \circ \kappa)$, 记

$$\kappa_1 = \kappa^{-1},$$

得

$$A_1 u = [A(u \circ \kappa)] \circ \kappa_1. \quad (1)$$

设 $A = O_p(a)$, $a = a(x, y, \xi) \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$, 有:

$$(A_1 u)(x) = \iint e^{i(\kappa_1(x) - y \cdot \xi)} a(\kappa_1(x), y, \xi) u(\kappa(y)) dy \cdot \xi,$$

令 $y = \kappa_1(z)$, 则上式变为:

$$(A_1 u)(x) = \iint e^{i(\kappa_1(x) - \kappa_1(z) \cdot \xi)} a(\kappa_1(x), \kappa_1(z), \xi) u(z) |\det \kappa_1'(z)| dz d\xi, \quad (2)$$

其中 κ_1' 为映射 κ_1 的 Jacobi 方阵. 故 A_1 为具位相函数 $\varphi(x, y, \xi) = (\kappa_1(x) - \kappa_1(y), \xi)$ 的 FIO. 可证明: 当 $1 - \rho \leq \delta < \rho$ 时, A_1 为 ψ DO. 这可由下述一般性定理推出.

定理1 设定义于 $X \times X \times \mathbb{R}_n$ 的位相函数 φ 具性质:

1) $\varphi(x, y, \theta)$ 关于 θ 为线性函数;

2) 当且仅当 $x = y$ 时, 有 $|\varphi_\theta'(x, y, \theta)| = 0$;

设 A_1 的振幅 $a(x, y, \theta) \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$, 且

$$1 - \rho \leq \delta < \rho, \quad (3)$$

则 FIO A_1 为 ψ DO: $A_1 \in L_{p, \delta}^m(X)$.

为证明定理 1, 先建立下面的引理.

引理1 设位相满足定理 1 中的条件 1) 及 2), 则存在对角集 $\Delta \subset X \times X$ 的邻域 Ω 及在 Ω 中非退化的 $n \times n$ 实方阵函数 $\psi(x, y) \in C^\infty(\Omega)$, 即 ψ 的每个元 ψ_{ij} 属 $C^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, 使

$$\varphi(x, y, \psi(x, y)\xi) = (x - y, \xi), \quad (x, y) \in \Omega \quad (4)$$

$$\det \psi(x, x) \det \varphi_{x, \theta}'(x, y, \theta)|_{y=x} = 1. \quad (5)$$

证 由条件 1) 知有 $\varphi_j(x, y) \in C^\infty$ 使

$$\varphi(x, y, \theta) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x, y) \theta_j, \quad (6)$$

由条件2)及(6)知当且仅当 $y=x$ 时有

$$\varphi_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

故 $\varphi(x, x, \theta) = 0$ 。对 x 求导后得

$$\varphi'_y|_{y=x} = -\varphi'_x|_{y=x}. \quad (7)$$

据位相函数的定义知有:

$$\varphi'_x|_{y, \theta} = (\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_\theta) \neq (0, \dots, 0), \quad \theta \neq 0$$

把 $y=x$ 代入上式, 利用条件2)及(7), 得:

$$\varphi'_x|_{y=x} \neq 0, \quad \theta \neq 0$$

这表明下列关于 $\theta_1, \dots, \theta_n$ 的线性齐次方程组:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} \Big|_{y=x} \theta_j = 0; \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \Big|_{y=x} \theta_j = 0 \end{cases}$$

只有零解 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) = 0$, 故相应的系数行列式不为零, 即

$$\det \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right) \Big|_{y=x} \neq 0. \quad (8)$$

另一方面, 对邻近于对角集 Δ 的 (x, y) , 有

$$\varphi_j(x, y) = \varphi_j(x, y) - \varphi_j(y, y)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \varphi_j(y + t(x-y), y) dt$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} (y + t(x-y), y) dt (x_k - y_k),$$

即:

$$\varphi_j(x, y) = \sum_{k=1}^n \varphi_{kj}(x, y)(x_k - y_k); \quad (9)$$

$$\varphi_{kj}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(y + t(x-y), y) dt \in C^\infty(\Omega').$$

Ω' 为 Δ 的某邻域。显然有

$$\varphi_{kj}|_{y=x} = \left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \right|_{y=x} = \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial \theta_j} \right|_{y=x}. \quad (10)$$

用 $W(x, y)$ 记方阵 $(\varphi_{kj}(x, y))$, 则由(8)及(10)知, 存在 $X \times X$ 中对角集 Δ 的邻域 Ω , 使当 $(x, y) \in \Omega$ 时,

$$\det W(x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

记 W 的逆方阵为

$$\psi(x, y) = W(x, y)^{-1}, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

由(6)及(9)得

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \theta) &= \sum_{j, k=1}^n \varphi_{kj}(x, y)(x_k - y_k)\theta_j \\ &= ((x-y), W(x, y)\theta). \end{aligned} \quad (12)$$

令 $W(x, y)\theta = \xi$, 即 $\theta = \psi(x, y)\xi$, 由(12)即得(4):

$$\varphi(x, y, \psi(x, y)\xi) = (x-y, \xi).$$

又由(10)及(11)有

$$\begin{aligned} \psi(x, y)|_{y=x} &= \varphi_{x, \theta}''(x, y, \theta)|_{y=x} \\ &= \psi(x, x)W(x, x) = I. \end{aligned} \quad (13)$$

I 为 $n \times n$ 单位方阵。由(13)即得(15)。

定理1的证明 把(2)写成标准形式

$$A_1 u(x) = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a_1(x, y, \theta) u(y) dy d\theta, \quad (2')$$

$$\varphi(x, y, \theta) = (\kappa_1(x) - \kappa_1(y), \theta); \quad (14)$$

$$Q_1(x, y, \theta) = a(\kappa_1(x), \kappa_1(y), \theta) |\det \kappa_1'(y)| \\ \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n), \quad (15)$$

φ 显然满足引理 1 的全部条件. 故存在 ψ 及 Ω 如上述, 使式 (4) 成立.

取 $\tau(x, y) \in C^\infty(X \times X)$, $\text{supp} \tau \subset \Omega$, 使 τ 在对角集 Δ 的某邻域 $\Omega_1 \subset \Omega$ 中取值 1. 记

$$a^{(1)} = \tau a_1, \quad a^{(2)} = (1 - \tau) a_1,$$

则 $a_1 = a^{(1)} + a^{(2)}$, 于是 A_1 相应地分解为 $A_1 = A^{(1)} + A^{(2)}$.

由于 $A^{(2)}$ 的振幅 $a^{(2)}$ 在对角 Δ 的邻域 Ω_1 中恒等于零, 据条件 2) 及 3.2.1 定理 1 知 $K_{A^{(2)}} \in C^\infty(X \times X)$, 随之 $A^{(2)} \in L^{-\infty}(X) \subset L_{p, \delta}^m(X)$. 故剩下只须证明 $A^{(1)}$ 属于 $L_{p, \delta}^m(X)$. 在

$$A^{(1)} u(x) = \iint e^{i\varphi(x, y, \theta)} a^{(1)}(x, y, \theta) u(y) dy d\theta$$

中作变换

$$x' = x, \quad y' = y, \quad \xi = \psi^{-1}\theta, (x, y) \in X \times X, \quad \theta \in \mathbb{R}_n, \quad (16)$$

应用引理 1 可得

$$A^{(1)} u(x) = \iint e^{i\varphi(x, y, \xi)} a^{(1)}(x, y, \psi(x, \\ y)\xi) |\det \psi(x, y)| u(y) dy d\theta, \quad (17)$$

记

$$b(x, y, \xi) = a^{(1)}(x, y, \psi(x, y)\xi) |\det \psi(x, y)| \\ \equiv \tau(x, y) |\det \psi| a_1(x, y, \psi\xi).$$

为证 $b \in S_{p, \delta}^m(X \times X \times \mathbb{R}_n)$, 注意有 $\text{supp} \tau \subset \Omega$, 而在 Ω 中 $\det \psi(x, y)$ 不变号, 故 $b \in C^\infty(X \times X \times \mathbb{R}_n)$ 且 $\text{supp}_{x, y} b \subset \Omega$. 于是只须证 $a^{(1)}(x, y, \psi(x, y)\xi) \in S_{p, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_n)$.

注意 (16) 所确定的映射 f 是 Ω 到自身的微分同胚, 故其逆

f^{-1} 亦然,且满足3.1.3引理2的条件b),故确有

$$b(x, y, \xi) = (a^{(1)} \circ f^{-1})(x, y, \xi) \in S_{p, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}_n).$$

综合上述所证,知 $A_1 \in L_{p, \delta}^m(X)$.

推论1 设 $A \in L_{p, \delta}^m(X)$, $1 - \rho \leq \delta < \rho$. κ 为 $X \rightarrow X'$ 的微分同胚,则由(1)确定的算子 $A_1 \in L_{p, \delta}^m(X')$.

3.4.2 特征的变换公式

为建立 A_1 的特征 σ_{A_1} 及 A 的特征 σ_A 间的联系, 求出 σ_{A_1} 的渐近展式, 须先证明两个引理.

引理2 设向量函数 $w(x) = (w_1(x), \dots, w_n(x)) \in C^\infty(X)$, $x^0 \in X$ 是 w 的二阶零点, 即: $D_x^\beta w|_{x=x^0} = 0$, $|\beta| = 0, 1$, 则

$D_x^\alpha e^{i(w(x) \cdot \eta)}|_{x=x^0}$ 是 η 的次数 $\leq \frac{|\alpha|}{2}$ 的多项式.

证 当 $|\alpha| = 0$ 时, $e^{i(w(x^0) \cdot \eta)} = 1$. 引理成立.

应用数学归纳法, 设 $|\alpha| \leq k$ 时命题真. 当 $|\alpha| = k+1$ 时, 令 $\alpha = \alpha' + \beta$, $|\alpha'| = k$, $|\beta| = 1$, 则有

$$\begin{aligned} D_x^\alpha e^{i(w(x) \cdot \eta)}|_{x=x^0} &= D_x^{\alpha'} [e^{i(w(x) \cdot \eta)} (i D_x^\beta w(x), \eta)]|_{x=x^0} \\ &= \sum_{\gamma+\delta=\alpha', \gamma \neq \delta} \frac{\alpha'!}{\gamma! \delta!} [D_x^\gamma e^{i(w(x) \cdot \eta)}]_{x=x^0} (i D_x^{\delta+\beta} w(x), \eta)|_{x=x^0}, \end{aligned}$$

当 $|\delta + \beta| \leq 1$ 时, 和式中的第二个因子为零, 所以只须考虑 $|\delta + \beta| > 1$ 的项, 即 $|\delta| \geq 1$ 的项. 由于 $|\gamma + \delta| = |\alpha'| = k$, 知 $|\gamma| \leq k-1$. 据归纳法假定, 和式中第一个因子都是 η 的次数 $\leq \frac{k-1}{2}$ 的多项式. 第二个因子显然都是次数 ≤ 1 的多项式. 故和

式中每一项都是关于 η 的次数 $\leq \frac{k-1}{2} + 1 = \frac{k+1}{2} = \frac{|\alpha|}{2}$ 的多项

式。引理 2 得证。

引理 3 设 $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ 是系数属 $C^\infty(X)$ 的 m 阶线性微分算子, 则有如下的推广的 Leibniz 公式

$$P(x, D)(uv) = \sum_{|\alpha| \leq m} P^{(\alpha)}(x, D)u \cdot \frac{D^\alpha v}{\alpha!},$$

$$\forall u, v \in C^m(X), \quad (18)$$

其中 $P^{(\alpha)}(x, D)$ 由 $P^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha P(x, \xi)$ 换 ξ 为 D 而得。

证 这个公式有多种证法。这里用拟微分算子给出一个较简单的证明。

可先对 $u, v \in C_0^\infty(X)$ 的情形验证 (18); 而当 $u, v \in C^\infty(X)$ 时, 取 $\varphi \in C_0^\infty(X)$, 使 φ 在任一固定紧集 $K \subset X$ 上取值 1, 令 $u_1 = \varphi u, v_1 = \varphi v$, 代入 (18) 知此式对 u 及 v 在 K 上成立。由 K 的任意性知 (18) 在整个 X 中成立。最后, 对于 $C^m(X)$ 中的 u, v , 可用其光滑化 $\psi_\varepsilon * u, \psi_\varepsilon * v \in C^\infty(X)$ 逼近, 这里 $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$, $\psi(x) \in C_0^\infty(X)$, $\int \psi(x) dx = 1$ 。参看 2.3.3。

因 $u, v \in C_0^\infty(X)$, 其 Fourier 变换 $\widehat{u}(\xi), \widehat{v}(\xi)$ 存在且关于 ξ 急降, 故下列演算过程是合理的

$$\begin{aligned} P(x, D)(uv)(x) &= \int e^{i(x \cdot \xi)} P(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi \\ &= \int e^{i(x \cdot \xi)} P(x, \xi) (\widehat{u} * \widehat{v})(\xi) d\xi \\ &= \iint e^{i(x \cdot \xi)} P(x, \xi) \widehat{u}(\xi - \eta) \widehat{v}(\eta) d\eta d\xi \\ &= \iint e^{i(x \cdot \xi + \eta)} P(x, \xi + \eta) \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\eta) d\eta d\xi. \end{aligned}$$

这里用到代换 $\xi = \xi - \eta$ 。把 $P(x, \xi + \eta)$ 对 η 展开得

$$\begin{aligned}
& P(x, D)(uv)(x) \\
&= \iint e^{i(x, \xi + \eta)} \sum_{|\alpha| \leq m} P^{(\alpha)}(x, \xi) \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \widehat{u}(\xi) \widehat{v}(\eta) d\eta d\xi \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} \int e^{i(x, \xi)} P^{(\alpha)}(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \int e^{i(x, \eta)} \frac{1}{\alpha!} \widehat{D}^\alpha v(y) d\eta \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} P^{(\alpha)}(x, D) u(x) \frac{D^\alpha v(x)}{\alpha!},
\end{aligned}$$

故(18)成立。

定理 2 给定微分同胚 $\kappa: X \rightarrow X$, 及适拟微分算子, $A \in L_{\rho, \delta}^m(X)$, 且 $1 - \rho \leq \delta < \rho$. 设算子 A_1 由式(1)确定, 则有

$$\begin{aligned}
\sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\kappa(x)} &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \sigma_A^{(\alpha)}(x, \\
&\quad \kappa'(x)\eta) D_x^\alpha e^{i(\kappa x''(x), \eta)}|_{x=x}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\sigma_A^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \sigma_A(x, \xi);$$

$$\kappa_x'(z) = \kappa(z) - \kappa(x) - \kappa'(x)(z - x), \quad (19')$$

而 κ' 则为变换 κ 的 Jacobi 方阵。

证 先注意 $z = x$ 是 $\kappa_x'(z)$ 的二阶零点。由引理 2 知

$D_x^\alpha e^{i(\kappa_x'(z), \eta)}|_{z=x} \in S^{\frac{|\alpha|}{2}}$. 故(19)右边的通项属于

$$S_{\rho, \delta}^{m - (\rho - \frac{1}{2})|\alpha|}.$$

因 $1 - \rho \leq \delta < \rho$, 有 $\rho > \frac{1}{2}$, 于是渐近展式 (19) 有意义, 即,

$$m - \left(\rho - \frac{1}{2}\right)|\alpha| \rightarrow -\infty (|\alpha| \rightarrow +\infty).$$

取 σ_A 作为 A 的振幅代入(2), 经变换(16)得:

$$A_1 u(x) = \iint e^{i(x-y, \eta)} \sigma_A(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta) G(x, y) dy d\eta, \quad (20)$$

$$G(x, y) = \det \kappa_1'(x) \det \psi(x, y)|, \quad \kappa_1 = \kappa^{-1}.$$

据3.3.4定理7知

$$\begin{aligned} \sigma_{A_1}(x, y) &\sim \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_{\eta}^{\alpha} D_y^{\alpha} [\sigma_A(\kappa_1(x), \\ &\quad \psi(x, y)\eta) G(x, y)]|_{y=x} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_y^{\alpha} [G(x, y) \partial_{\eta}^{\alpha} \sigma_A(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta)]|_{y=x} \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D_y^{\alpha} [G_{\alpha}(x, y) \sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta)]|_{y=x}, \end{aligned}$$

其中 $G_{\alpha}(x, y)$ 只依赖于变换 κ , 而与算子 A 无关.

现在计算

$$\begin{aligned} &D_y^{\alpha} [G_{\alpha}(x, y) \sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta)] \\ &= \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma! \delta!} D_y^{\gamma} G_{\alpha}(x, y) D_y^{\delta} \sigma_A^{(\alpha)}(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta) \\ &= \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma! \delta!} P_{\alpha, \delta}(x, y, \eta) \sigma_A^{(\delta+\alpha)}(\kappa_1(x), \psi(x, y)\eta), \end{aligned}$$

其中 $P_{\alpha, \delta} \in C^{\infty}$ 且关于 η 为次数 $\leq |\delta|$ 的多项式, 它们完全由变换 κ 确定, 而不依赖于 A . 于是有

$$\begin{aligned} \sigma_{A_1}(x, \eta) &\sim \sum_{\alpha} \sum_{\gamma+\delta=\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma! \delta!} P_{\alpha, \delta}(x, x, \eta) \sigma_A^{(\delta+\alpha)}(\kappa_1(x), \\ &\quad \psi(x, x)\eta) \sim \sum_{\beta} \sum_{\alpha} C_{\beta, \alpha}(x, \xi) \sigma_A^{(\beta)}(\kappa_1(x), \psi(x, x)\eta). \end{aligned}$$

注意 $|\beta| = |\alpha + \delta| \leq 2|\alpha|$, 故 $|\delta| = |\beta| - |\alpha| \leq |\beta| - \frac{1}{2}|\beta| =$

$\frac{1}{2}|\beta|$, 于是有

$$\sigma_{A_1}(x, \eta) \sim \sum_{\beta} \frac{1}{\beta!} C_{\beta}(x, \eta) \sigma_A^{(\beta)}(\kappa_1(x), \psi(x, x)\eta). \quad (21)$$

这里 $C_{\beta}(x, \eta)$ 仅由 κ 确定, 而与 A 无关, 且为系数属于 $C^{\infty}(X)$ 的多项式(关于 η), 其次数 $\leq \frac{|\beta|}{2}$.

在(21)中换 x 为 $\kappa(x)$, 并利用(13), 得

$$\psi(x, x) = [{}^t\kappa_1'(x)]^{-1} = {}^t[\kappa_1'(x)^{-1}].$$

由(21)及 Jacobi 矩阵的性质知

$$\psi(x', x')|_{x'=\kappa(x)} = {}^t[\kappa_1'(x')^{-1}]|_{x'=\kappa(x)} = {}^t\kappa'(x),$$

故有

$$\sigma_{A_1}(\kappa(x), \eta) \sim \sum_{\beta} \frac{g_{\beta}(x, \eta)}{\beta!} \sigma_A^{(\beta)}(x, {}^t\kappa'(x), \eta), \quad (22)$$

其中 $g_{\beta}(x, \eta) = C_{\beta}(x', \eta)|_{x'=\kappa(x)}$ 仍然是 η 的不超过 $\frac{|\beta|}{2}$ 次的

多项式, 其系数属于 $C^{\infty}(X)$, 且 g_{β} 完全由 κ 确定, 与 A 无关. 故可取 A 为线性偏微分算子, 直接求出形如(22)的渐近展式, 用来确定 $g_{\beta}(x, \eta)$.

事实上, 设 $A = P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_{\alpha}(x) D^{\alpha}$, $a_{\alpha}(x) \in C^{\infty}(X)$,

则有

$$\begin{aligned} \sigma_{A_1}(x', \eta)|_{x'=\kappa(x)} &= [e^{-i(x', \eta)} A_1 e^{i(y, \eta)}]|_{x'=\kappa(x)} \\ &= e^{-i(\kappa(x), \eta)} (A_1 e^{i(y, \eta)})|_{x'=\kappa(x)} \\ &= e^{-i(\kappa(x), \eta)} A e^{i(\kappa(x), \eta)} \\ &= e^{-i(\kappa(x), \eta)} [P(z, D_z) e^{i(\kappa(z), \eta)}]|_{z=x}. \end{aligned} \quad (23)$$

由(19')有

$$\kappa(z) = \kappa(x) + \kappa'(x)(z-x) + \kappa''_x(z);$$

$$(\kappa(z), \eta) = (\kappa(x), \eta) + (z-x, {}^t\kappa'(x)\eta) + (\kappa''_x(z), \eta),$$

代入(23), 并应用推广的Leibniz公式(18), 得

$$\begin{aligned} \sigma_{A_1}(y, \eta)|_{y=\kappa(x)} &= e^{-1}(x, {}^t\kappa'(x)\eta) P(z, D_x) \\ &\cdot [e^{i({}^t\kappa'(x)\eta, z)} e^{i(\kappa''_x(z), \eta)}] |_{z=x} \\ &= e^{-1}(x, {}^t\kappa'(x)\eta) \left[\sum_{|\alpha| \leq p} P^{(\alpha)}(z, D_x) \right. \\ &\quad \cdot e^{i({}^t\kappa'(x)\eta, z)} \cdot \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha e^{i(\kappa''_x(z), \eta)} \left. \right] |_{z=x} \\ &= e^{-1}(x, {}^t\kappa'(x)\eta) \sum_{|\alpha| \leq p} P^{(\alpha)}(x, {}^t\kappa'(x)\eta) \\ &\quad \cdot e^{i({}^t\kappa'(x)\eta, x)} \frac{1}{\alpha!} D_x^\alpha e^{i(\kappa''_x(x), \eta)} |_{z=x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\kappa'(x)\eta) [D_x^\alpha e^{i(\kappa''_x(x), \eta)}] |_{z=x} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{g_\alpha(x, y)}{\alpha!} \sigma_A^{(\alpha)}(x, {}^t\kappa'(x)\eta), \end{aligned}$$

由于 p 可为任意正整数, 故对每个 α 有

$$g_\alpha(x, y) = [D_x^\alpha e^{i(\kappa''_x(x), \eta)}] |_{z=x}. \quad (24)$$

把它们代入(22), 即得(19)。

推论2 $\sigma_{A_1}(y, \eta) = \sigma_A(\kappa_1(y), [{}^t\kappa_1'(y)]^{-1}\eta)$

$$\in S_{\rho, \delta}^{m-2(\rho-\frac{1}{2})}(X_1 \times \mathbb{R}_n). \quad (25)$$

证 由(24)可直接算出 $g_0 \equiv 1$, 且当 $|\beta| = 1$ 时有 $g_\beta \equiv 0$, 当 $|\beta| = 2$ 时, $g_\beta \equiv D_x^\beta(i\kappa(x), \eta)$. 利用这些结果及(19), 即得(25)。

3.4.3 流形上的拟微分算子

设 M 为 n 维 C^∞ 流形, 用 $C^\infty(M)$ 及 $C_0^\infty(M)$ 分别表示 M 上的无穷可微函数空间及具紧台的无穷可微函数空间. 设给定线性映射

$$A: C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M),$$

若 X 为 M 中的域 (不必是连通的), κ 为微分同胚: $X \rightarrow X_1 \subset \mathbb{R}^n$, 则可换图

$$\begin{array}{ccc} C_0^\infty(X) & \xrightarrow{A} & C^\infty(X) \\ \uparrow \kappa^* & & \uparrow \kappa^* \\ C_0^\infty(X_1) & \xrightarrow{A_1} & C^\infty(X_1) \end{array}$$

单值地确定算子 A_1 . 注意图中的算子 A 本应为算子 $r_x \circ A \circ I_x$, 这里 I_x 为自然嵌入: $C_0^\infty(X) \rightarrow C_0^\infty(M)$, r_x 为自然缩射 $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(X)$. 为简单计, 仍记为 A .

定义 1 若对任一微分同胚 $\kappa: X \rightarrow X_1$, 如上确定的算子 A_1 为 $X_1 \subset \mathbb{R}^n$ 中的 ψ DO, 则称算子: $A: C_0^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ 为流形 M 上的拟微分算子.

定理 1 表明: 当 $1-\rho \leq \delta < \rho$ 时, 在域 $X \subset \mathbb{R}^n$ 中定义的 ψ DO 确是流形 X 上的 ψ DO.

由 3.1.3 引理 2 知当时 $1-\rho \leq \delta < \rho$ 时, 符征类 $S_{\rho, \delta}^m(T^*M)$ 及相应的算子类 $L_{\rho, \delta}^m(M)$ 对于光滑流形 M 都有意义; 而本节

推论 1 更表明: 作为商空间 $S_{\rho, \delta}^m(T^*M) / S_{\rho, \delta}^{m-\frac{1}{2}(\rho-\frac{1}{2})}(T^*M)$ 中的元, 主符征有确切意义.

为了不致涉及过多概念, 对流形上的拟微分算子只作如上的简单介绍.

3.5 有界性定理

3.5.1 基本有界性定理

设 $A \in L_{p, \delta}^m(X)$, 其符征为 $\sigma_A(x, \xi)$. 现在考虑问题: 当 σ_A 满足什么条件时, A 可延拓为 $L_2(X) \rightarrow L_2(X)$ 的有界线性算子? 为解决这个问题, 先作一些预备性的讨论.

引理1 设 A 是 $C_0^\infty(X)$ 到 $C_0^\infty(X)$ 的线性映射, 则 A 可延拓为 $L_2(X)$ 到 $L_2(X)$ 的有界线性映射的充要条件是: 存在常数 $C > 0$, 使

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(X); \quad (1)$$

$$\|u\|^2 = \int_X u \overline{u} dx.$$

证 必要性是显然的. 充分性可如下证明. 因 $C_0^\infty(X)$ 为 $L_2(X)$ 的稠集, 故对每个 $u \in L_2(X)$, 存在列 $\{u_j\} \subset C_0^\infty(X)$, 使 $\|u_j - u\| \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$. 于是

$$\begin{aligned} \|Au_j - Au_k\| &\leq C\|u_j - u_k\| \\ &\leq C(\|u_j - u\| + \|u_k - u\|) \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故 $\{Au_j\}$ 是完备空间 $L_2(X)$ 的基本列, 而有极限 $v = \lim_{j \rightarrow \infty} Au_j$ 存在. 容易证明 v 由 u 所唯一确定, 而不依赖于逼近列 $\{u_j\}$ 的选择. 于是可定义 $Au = v$, 且显然有 $\|Au\| \leq C\|u\|$. 故充分性得证.

引理2 设 C 为适 ψ DO, $C \in L_{p, \delta}^m(X)$, 且 $C^* = C$, 即 C 为自伴算子, 则有

$$I_m \sigma_C(x, \xi) \in S_{p, \delta}^{m-\delta}(\rho-\delta)(X \times \mathbb{R}_n) \quad (2)$$

证 据3.3.5式(27)有

$$\sigma_{e*} - \overline{\sigma_e} \in S_{\rho-\delta}^{m-\delta},$$

故 $I_m \sigma_e = \frac{1}{2i}(\sigma_e - \overline{\sigma_e}) = \frac{1}{2i}(\sigma_{e*} - \sigma_e) \in S_{\rho-\delta}^{m-\delta}$, 这里用到

自伴性.

引理3 设 $a(x, \xi) \in S_{\rho-\delta}^0(X \times \mathbb{R}_n)$, 且对每个紧集 $K \subset X$, 存在常数 $d(K) > 0$, $r(K) > 0$, 使

$$|a(x, \xi)| \geq d(K), \quad x \in K, \quad |\xi| \geq r(K), \quad (3)$$

则对任何实数 λ , 存在常数 $C(\alpha, \beta, K, \lambda) > 0$, 使得

$$|D_x^\alpha D_x^\beta [a(x, \xi)]^\lambda| \leq C(\alpha, \beta, K, \lambda) (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}, \\ x \in K, \quad |\xi| \geq r(K). \quad (4)$$

证 记 $|\alpha + \beta| = k$, 对 k 应用数学归纳法.

当 $|k| = 0$ 时, 由于 $a \in S_{\rho-\delta}^0$ 及 (3), 知有 $C(K) > 0$, 使

$$d(K) \leq |a(x, \xi)| \leq C(K), \quad x \in K, \quad |\xi| \geq r(K),$$

于是

$$|[a(x, \xi)]^\lambda| = |a(x, \xi)|^\lambda \\ \leq (c^\lambda(K) + d^\lambda(K)) = C(0, 0, K, \lambda),$$

故 (4) 当 $k = 0$ 时成立. 设 $k \leq p$ 时, (4) 成立. 当 $k = p + 1$ 时, 不妨设 $\alpha = \alpha' + \alpha''$, 其中 $|\alpha' + \beta| = p$, 而 $\alpha'' = (1, 0, \dots, 0)$; 或设 $\beta = \beta' + \beta''$, $|\alpha + \beta'| = p$, $\beta'' = (1, 0, \dots, 0)$, 证明是类似的.

当 $x \in K$, $|\xi| \geq r(K)$ 时, 有

$$|D_x^\alpha D_x^\beta a^\lambda| = |D_x^{\alpha'} D_x^\beta D_{x_1} a^\lambda| \\ = |\lambda| |D_x^{\alpha'} D_x^\beta [a^{\lambda-1}(x, \xi) D_{x_1} a(x, \xi)]|$$

在上式右边应用 Leibniz 公式, 得

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_x^\beta a^\lambda(x, \xi)| &\leq C(\alpha, \beta, \lambda) \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \beta} |D_x^{\xi_1} D_x^{\gamma_2} [a^{\lambda-1}(x, \\
&\quad \xi)] D_x^{\xi_2 + \alpha} D_x^{\gamma_2} a(x, \xi)| \\
&\leq C_A(\alpha, \beta, \kappa, \lambda) \sum (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha_1| + \delta|\gamma_1|} (1 \\
&\quad + |\xi|)^{-\rho|\alpha_2| + \delta|\gamma_2|} \\
&\leq C'(\alpha, \beta, \kappa, \lambda) (1 + |\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|},
\end{aligned}$$

故引理 3 成立.

引理 4 设 $C \in L_{\rho, \delta}^0(X)$ 为适伪 DO, 且 $\rho > \delta$, $\rho > 0, \delta < 1$, 并满足条件:

$$1) C = C^*, \quad (5)$$

2) 对每个紧集 $K \subset X$, 有

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ |\xi| \geq t}} \inf_{x \in K} \operatorname{Re} \sigma_C(x, \xi) > 0, \quad (6)$$

则存在适拟微分算子 $B \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, 使

$$R \equiv B * B - C \in L^{-\infty}(X). \quad (7)$$

证 下面应用拟微分算子理论中常用的标准程序来寻求 B , 基本思想是逐次逼近. 这种逼近法是建立在特征的渐近展式理论上的, 而避免了经典逐次逼近法中关于收敛性的复杂讨论. 这个程序的主要步骤如下:

第一步: 求 $B_0 \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, 使

$$R_0 = B_0 * B_0 - C \in L_{\rho, \delta}^{-(\rho-\delta)}(X), \quad (8)$$

第二步: 求 $B_1 \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, 使

$$R_1 = (B_0 + B_1) * (B_0 + B_1) - C \in L_{\rho, \delta}^{-2(\rho-\delta)}(X), \quad (9)$$

第三步: 一般地, 逐次求得 $B_0, B_1, \dots, B_N, \dots$, 使

$$\begin{aligned}
R_N &= (B_0 + \dots + B_N) * (B_0 + \dots + B_N) - C \\
&\in L_{\rho, \delta}^{-(N+1)(\rho-\delta)}(X);
\end{aligned} \quad (10)$$

于是取 $b \sim \sum_j \sigma_{B_j}$, 则以 b 为特征的适拟微分算子 B 即为所求.

下面给出详细的构造及证明过程.

(8) 显然等价于 $\sigma_{B_0} *_{B_0} c \in S_{\rho, \delta}^{-}(\rho^{-\delta})$. 由引理 2 知后者又等价于 $\operatorname{Re} \sigma_{B_0} *_{B_0} - \operatorname{Re} \sigma_c \in S_{\rho, \delta}^{-}(\rho^{-\delta})$. 据 3.3.4 式 (27) 及 (13) 可算出

$$\sigma_{B_0} *_{B_0} = |\sigma_{B_0}|^2 + r, \quad r \in S_{\rho, \delta}^{-}(\rho^{-\delta}).$$

记 $b = \sigma_{B_0}$, 于是 B_0 的寻求归结为求 b_0 , 使有

$$|b_0|^2 - \operatorname{Re} \sigma_c \in S_{\rho, \delta}^{-}(\rho^{-\delta}); \quad (11)$$

$$b_0 \in S_{\rho, \delta}^0. \quad (12)$$

b_0 可如下构造. 取 X 的单位分解 $\{h_j(x)\}$, 记 $K_j = \operatorname{supp} h_j$. 由 (6) 知存在常数 $d(K_j) > 0$ 及 $r(K_j) > 0$, 使

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma_c(x, \xi) &> d(K_j), \quad x \in K_j, \quad |\xi| > r(K_j), \\ j &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

且恒可取 $r(K_{j+1}) > r(K_j)$, $j = 1, 2, \dots$.

取一系列实值函数 $\psi_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$, 使其性质

$$\psi_j(\xi) \geq 0, \quad \psi_j(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq r(K_{j+1}); \\ 1, & |\xi| > r(K_{j+2}); \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots.$$

$$\text{令} \quad (14)$$

$$b_0(x, \xi) = \left[\sum_j \psi_j^2(\xi) h_j(x) \operatorname{Re} \sigma_c(x, \xi) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

据 (13)、(14) 及引理 3 (取 $\lambda = \frac{1}{2}$) 知 $b_0 \in S_{\rho, \delta}^0$. 此外,

$$|b_0|^2 - \operatorname{Re} \sigma_c = (b_0 + \sqrt{\operatorname{Re} \sigma_c})(b_0 - \sqrt{\operatorname{Re} \sigma_c})$$

$$= (b_0 + \sqrt{\operatorname{Re} \sigma_C}) \sum_j (\psi_j(\xi) - 1) h_j(x) \sqrt{\operatorname{Re} \sigma_C}$$

当 $x \in K$ 时, 上式的和为有限项, 且 $\psi_j(\xi) - 1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, 故存在 $r(K)$, 当 $x \in K$, $|\xi| > r(K)$ 时, $|b_0|^2 - \operatorname{Re} \sigma_C \equiv 0$, 由此知 $|b_0|^2 - \operatorname{Re} \sigma_C \in S^{-\infty} \subset S_{\rho, \delta}^{-(l+1), (\rho-\delta)}$. 据 3.3.4 推论 1, 知存在适拟微分算子 B_0 , 使 $\sigma_{B_0} - b_0 \in S^{-\infty}$. 显然, σ_{B_0} 也满足要求 (11) 及 (12). 于是 B_0 确为所求.

设当 $j = 0, 1, \dots, l-1$ 时, 已求得适拟微分算子

$$B_j \in L_{\rho, \delta}^{-j, (\rho-\delta)}(X), \quad \text{使 } R_{l-1} = \left(\sum_{j=0}^{l-1} B_j \right)^* \sum_{j=0}^{l-1} B_j - C \in$$

$L_{\rho, \delta}^{-l, (\rho-\delta)}(X)$. 今证明: 存在适拟微分算子 B_l , 具性质

$$B_l \in S_{\rho, \delta}^{-l, (\rho-\delta)}(X); \quad (16)$$

$$\begin{aligned} R_l &= (B_0 + \dots + B_l)^* (B_0 + \dots + B_l) - C \\ &\in L_{\rho, \delta}^{-(l+1), (\rho-\delta)}(X). \end{aligned} \quad (17)$$

为此可注意, 对任一适拟微分算子 $B_l \in L_{\rho, \delta}^{-l, (\rho-\delta)}$, 有

$$\begin{aligned} R_l &= R_{l-1} + B_l^* (B_0 + \dots + B_{l-1}) \\ &\quad + (B_0 + \dots + B_{l-1})^* B_l + B_l^* B_l \\ &\equiv R_{l-1} + B_l^* B_0 + B_0^* B_l \pmod{L^{-(l+1), (\rho-\delta)}}, \end{aligned}$$

故只须构造适拟微分算子 B_l , 使满足 (16) 及如下要求

$$B_l^* B_0 + B_0^* B_l + R_{l-1} \in L_{\rho, \delta}^{-(l+1), (\rho-\delta)}(X). \quad (17')$$

后一要求等价于条件

$$\sigma_{B_l^* B_0} + \sigma_{B_0^* B_l} + \sigma_{R_{l-1}} \in S_{\rho, \delta}^{-(l+1), (\rho-\delta)}. \quad (18)$$

利用渐近展式并注意 $\sigma_{B_0} \equiv b_0 \pmod{S^{-\infty}}$, 且 b_0 取实值, 于是 (18) 等价于

$$2b_0 \operatorname{Re} \sigma_{B_l} + \sigma_{R_{l-1}} \in S_{\rho, \delta}^{-(l+1), (\rho-\delta)}.$$

因显然有 $R_{l-1}^* = R_{l-1}$, 且 $R_{l-1} \in L_{\rho, \delta}^{-l(\rho-\delta)}$, 据引理2 知有:

$$\sigma_{R_{l-1}} \equiv \text{Re} \sigma_{R_{l-1}} \pmod{S_{\rho, \delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}}$$

记 $b_l = \sigma_{B_l}$, 于是问题归结为求 b_l , 使

$$b_l \in S_{\rho, \delta}^{-l(\rho-\delta)}, \quad (19)$$

$$2b_0 b_l + \text{Re} \sigma_{R_{l-1}} \in S_{\rho, \delta}^{-(l+1)(\rho-\delta)}. \quad (20)$$

由于 $b_0 \in S_{\rho, \delta}^0$, 且由(15)知 $b_0(x, \xi)$ 满足引理3 的条件, 故可仿照第一步的构造法, 取

$$b_l = \sum_j \psi_j^*(\xi) h_j(x) \cdot (b_0)^{-1} \left(\frac{-1}{2} \text{Re} \sigma_{R_{l-1}} \right),$$

其中 ψ_j^* 为类似于 ψ_j 的函数. 不难直接验证 b_l 满足要求(19)及(20). 作适拟微分算子 B_l , 使 $\sigma_{B_l} \equiv b_l \pmod{S^{-\infty}}$. 于是 B_l 即为所需.

最后, 由3.3.3定理5 知存在 $b \in S_{\rho, \delta}^0$, 使

$$b \sim \sum_j \sigma_{B_j},$$

取适拟微分算子 B , 使其符征 $\sigma_B \equiv b \pmod{S^{-\infty}}$, 则 B 即为引理所求的拟微分算子. 事实上, 对任何正整数 N 有

$$\begin{aligned} B*B - C &= \left(B - \sum_{j=0}^{N-1} B_j + \sum_{j=0}^{N-1} B_j \right)^* \left(B - \sum_{j=0}^{N-1} B_j + \sum_{j=0}^{N-1} B_j \right) - C \\ &\equiv \left(\sum_{j=0}^{N-1} B_j \right)^* \sum_{j=0}^{N-1} B_j - C \pmod{L_{\rho, \delta}^{-N(\rho-\delta)}} \\ &\equiv R_{N-1} \equiv 0 \pmod{L_{\rho, \delta}^{-N(\rho-\delta)}}, \end{aligned}$$

即 $B*B - C \in L_{\rho, \delta}^{-N(\rho-\delta)}$. 由 N 的任意性知 $B*B - C \in L^{-\infty}$.

定理 1 设适拟微分算子 $A \in L^{\rho, \delta}_{\text{p. s.}}(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. 若存在常数 $M > 0$, 对每个紧集 $K \subset X$, 使

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| < M, \quad (21)$$

则存在具 Hermite 核 $r(x, y) = \overline{r(y, x)} \in C^\infty(X \times X)$ 的积分算子 R , 使得

$$\langle Au, Au \rangle \leq M^2 \langle u, u \rangle + \langle Ru, u \rangle, \quad \forall u \in C_0^\infty(X), \quad (22)$$

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int \varphi \overline{\psi} dx.$$

证 令 $C = M^2 I - A^* A$, 这里 I 为恒等算子, 则有 $C^* = C$, 且 $\text{Re} \sigma_C = M^2 - |\sigma_A|^2 + r_1$, $r_1 \in S_{\rho}^{-}(\rho - \delta)$. 由此得

$$\begin{aligned} \liminf_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} \text{Re} \sigma_C &\geq \liminf_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} (M^2 - |\sigma_A|^2) \\ &\quad - \liminf_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} |r_1(x, \xi)| \\ &= \liminf_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} (M^2 - |\sigma_A|^2) \\ &\geq M^2 - \left(\limsup_{t \rightarrow +\infty, \substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A| \right)^2 > 0, \end{aligned}$$

故适拟微分算子 C 满足引理 4 的条件. 于是存在适拟微分算子 $B \in L^{\rho, \delta}_{\text{p. s.}}(X)$, 使

$$R = B^* B - C \in L^{-\infty}(X).$$

因此, R 为具 C^∞ 光滑核 $r(x, y)$ 的积分算子, 且 $R^* = R$, 即 $\overline{r(y, x)} = r(x, y)$ 为 Hermite 核. 于是有

$$\begin{aligned} \langle Au, Au \rangle &= \langle A^* Au, u \rangle = M^2 \langle u, u \rangle + \langle Ru, u \rangle - \langle Bu, Bu \rangle \\ &\leq M^2 \langle u, u \rangle + \langle Ru, u \rangle, \quad \forall u \in C_0^\infty(X), \end{aligned}$$

故 (22) 成立.

下面给出使 (21) 成立的一个充分条件.

引理5 设 $A \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 K_A 具紧台, 则存在常数 $M > 0$, 使对每个紧集 $K \subset X$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in K \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| < M. \quad (23)$$

证 首先指出, 若 K_A 具紧台, 则存在紧集 $K_0 \subset X$, 使对所有的 $u \in C^\infty(X)$, 有 $\text{supp } Au \subset K_0$, 即 A 映 $C^\infty(X)$ 到 $C_0^\infty(K_0)$, 事实上, 可取 $K_0 = \pi_1 \text{supp } K_A$, 则 K_0 为 X 中紧集, 且对任何 $v \in C_0^\infty(X \setminus K_0)$, 有 $(\text{supp } v \times X) \cap \text{supp } K_A = \emptyset$, 于是 $(Au, v) = (K_A, uv) = 0$, 即 $\text{supp } Au \subset K_0$. 其次, 因

$$\sigma_A(x, \xi) = e^{-i(x, \xi)} A(e^{i(\xi, \cdot)}),$$

故据上面所证, 知有 $\pi_1 \text{supp } \sigma_A \subset K_0$. 又因 $\sigma_A \in S_{\rho, \delta}^0$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in X \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| \leq \sup_{\substack{x \in K_0 \\ \xi \in R_\delta}} |\sigma_A(x, \xi)|$$

$$\leq C(K_0)(1 + |\xi|)^\delta = C(K_0) < C(K_0) + 1 = M.$$

定理2 (基本有界性定理) 设 $A \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 K_A 具紧台, 则存在常数 $C > 0$, 使

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(X),$$

于是 A 可延拓为 $L_2(X) \rightarrow L_2(X)$ 的连续线性算子.

证 记 $K_i = \pi_i \text{supp } K_A$, $i = 1, 2$. 取定 $\psi(x) \in C_0^\infty(X)$, 使 ψ 在 K_2 的某个邻域中取值 1, 且 $0 \leq \psi \leq 1$. 易知

$$Au - A(\psi u) + A[(1 - \psi)u] = A(\psi u).$$

据引理 4 及引理 5 知有

$$\begin{aligned} \langle Au, Au \rangle &= \langle A(\psi u), A(\psi u) \rangle \\ &\leq M^2 \langle \psi u, \psi u \rangle + \langle R\psi u, \psi u \rangle \\ &= M^2 \|\psi u\|^2 + \iint r(x, y) \psi(y) \overline{\psi(x)} u(y) \overline{u(x)} dx dy \end{aligned}$$

$$= M^2 \|\psi u\|^2 + \iint r_1(x, y) u(y) \overline{u(x)} dx dy,$$

其中 $r_1 = \overline{\psi(x)} \psi(y) r$. 故得

$$\|Au\|^2 \leq M^2 \|u\|^2 + \langle R_1 u, u \rangle, \quad \forall u \in C_0^\infty(X). \quad (24)$$

R_1 为具 Hermite 核 $r_1 \in C_0^\infty(X \times X)$ 的积分算子. 于是有

$$\begin{aligned} \langle R_1 u, u \rangle &= \iint r_1(x, y) u(y) \overline{u(x)} dx dy \\ &\leq \left(\iint |r_1(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}} \|u\|^2 \\ &= C_1^2 \|u\|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(X), \end{aligned}$$

代入(24)得

$$\|Au\| \leq \sqrt{M^2 + C_1^2} \|u\| = C \|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(X),$$

故由引理 1 知 A 可延拓为由 $L_2(X)$ 到其自身的连续线性算子.

3.5.2 紧性定理

引理6 存在 $\tau(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 具性质: $\tau \geq 0$, $\int \tau dx = 1$, $0 \leq \widehat{\tau}(\xi) \leq 1$, 这里 $\widehat{\tau}(\xi)$ 为 $\tau(x)$ 的 Fourier 变换.

证 取 $\tau_0(x) \in C_0^\infty(X)$, 使 $\tau_0 \geq 0$, $\int \tau_0 dx = 1$. 令

$$\tau(x) = \int \tau_0(x+y) \tau_0(y) dy,$$

则 τ 即为引理 6 所求. 事实上, 记 $\tau_1(x) = \tau_0(-x)$, 则有 $\tau = \tau_0 * \tau_1$. 故 $\text{supp } \tau \subset \text{supp } \tau_0 + \text{supp } \tau_1$, 随之确有 $\tau \in C_0^\infty(X)$. $\tau \geq 0$ 是显然的, 且 $\int \tau(x) dx = \left(\int \tau_0(x) dx \right)^2 = 1$. 最后, 为验证 $0 \leq \widehat{\tau}(\xi) \leq 1$, 注意

$$\widehat{\tau}(\xi) = \widehat{\tau_0 \circ \tau_1} = \widehat{\tau_0} \cdot \widehat{\tau_1} = \widehat{\tau_0} \cdot \overline{\widehat{\tau_0}} = |\widehat{\tau_0}|^2 \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\tau}(\xi) &= |\widehat{\tau_0}|^2 = \left| \int e^{-i(x, \xi)} \tau_0(x) dx \right|^2 \\ &\leq \left(\int \tau_0(x) dx \right)^2 = 1, \end{aligned}$$

故 $\tau(x)$ 满足引理 C 的一切要求。

定理3 设 $A \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 K_A 具紧台, 若存在常数 $M > 0$, 使对每个紧集 $K \subset X$, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in X \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| < M, \quad (23)$$

则存在拟微分算子 $A_1 \in L_{\rho, \delta}^0(X)$, 满足下列要求:

- 1) $A - A_1 \in L^{-\infty}$;
- 2) K_{A_1} 具紧台;
- 3) $\|A_1 u\| \leq M \|u\|$, $\forall u \in C_0^\infty(X)$. (25)

注1 由引理 5 知满足(23)的常数 M 必然存在; 且(25)及(24)中的 M 是同一个常数。

证 取引理 6 中的函数 $\tau(x)$, 记

$$\tau_\varepsilon(x) = \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad u_\varepsilon(x) = u - \tau_\varepsilon \circ u;$$

$$A_\varepsilon u = A u_\varepsilon = A u - A(\tau_\varepsilon \circ u).$$

选常数 $M_1 > 0$, 使

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{x \in X \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| < M_1 < M,$$

换(24)中的 M 为 M_1 , 并把 u_ε 代入得

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leq M_1^2 \|u - \tau_\varepsilon \circ u\|^2 + \langle R_1(u - \tau_\varepsilon \circ u), u - \tau_\varepsilon \circ u \rangle, \quad (26)$$

其中 R_1 是具Hermite核 $r_1(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$ 的积分算子。

由于

$$\begin{aligned}\|u_\varepsilon\|^2 &= (2\pi)^{-n} \|\widehat{u}_\varepsilon\|^2 = (2\pi)^{-n} \|(1 - \widehat{\tau}_\varepsilon)\widehat{u}\|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \|[1 - \widehat{\tau}(\varepsilon\xi)]\widehat{u}(\xi)\|^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \|\widehat{u}\|^2 = \|u\|^2,\end{aligned}$$

故据(26)有

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leq M_1^2 \|u\|^2 + \langle R_\varepsilon u, u \rangle, \quad (27)$$

$$R_\varepsilon u \equiv R_1 u_\varepsilon \equiv R_1(u - \tau_\varepsilon * u).$$

容易算出 R_ε 的核 $r_\varepsilon(x, y)$ 为

$$r_\varepsilon(x, y) = \int [r_1(x, y) - r_1(x, y + \varepsilon s)] \tau(s) ds.$$

显然, 当 $\varepsilon > 0$ 充分小时, $r_\varepsilon(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$, 且有估计

$$|r_\varepsilon(x, y)| \leq C\varepsilon, \quad C > 0,$$

C 为不依赖于 (x, y) 的常数. 由此得

$$|\langle R_\varepsilon u, u \rangle| \leq C_1 \varepsilon \|u\|^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(X),$$

代入(27), 得估式:

$$\|A_\varepsilon u\|^2 \leq (M_1^2 + C_1 \varepsilon) \|u\|^2.$$

取 $\varepsilon_1 > 0$ 充分小, 使 $M_1^2 + C_1 \varepsilon_1 < M^2$, 记 $A_{\varepsilon_1} \equiv A_1$, 即得不等式(25).

为证明性质1)及2), 记 $T_{\varepsilon_1} u \equiv \tau_{\varepsilon_1} * u$. 据3.3.3例4知 $T_{\varepsilon_1} \in L^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. 由于 K_A 具紧台, 故 A 可延拓为连续映射: $C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(X)$, 于是 $A - A_1 = AT_{\varepsilon_1} \in L^{-\infty}(X)$.

最后, 由 $A_1 = A - AT_{\varepsilon_1}$, 经直接验证知 $\text{supp} K_{A_1}$ 含于 $\text{supp} K_A$ 的 $2\varepsilon_1$ 邻域(即所有距 $\text{supp} K_A$ 不超过 $2\varepsilon_1$ 的点组成的集合)中. 因 $\text{supp} K_A$ 为 $X \times X$ 中紧集, 故当取 ε_1 充分小时, $\text{supp} K_{A_1}$ 也是紧集.

定理4 (紧性定理) 设 $A \in L_{\rho, \delta}^s(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 K_A 具紧台, A 的符征 σ_A 具性质

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{\substack{x \in X \\ |\xi| \geq t}} |\sigma_A(x, \xi)| = 0, \quad (28)$$

则 A 可延拓为由 $L_2(X)$ 到 $L_2(X)$ 的紧算子.

证 据条件(28)及定理2知, 对每个正整数 l , 存在 $A_l \in L_{\rho, \delta}^s(X)$, 使 $A - A_l \in L^{-\infty}(X)$, K_{A_l} 具紧台, 且

$$\|A_l u\| \leq \frac{1}{l} \|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(X). \quad (29)$$

记 $R_l = A - A_l$, 则 R_l 为具核 $r_l(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$ 的积分算子, 而为由 $L_2(X)$ 到 $L_2(X)$ 的紧算子(全连续算子).

由(29)知 $\|A - R_l\| \leq \frac{1}{l}$, 故

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|A - R_l\| = 0,$$

即紧算子列 $\{R_l\}$ 依算子范数收敛于算子 A , 故 A 也是紧算子.

推论1 设 $A \in L_{\rho, \delta}^m(X)$, $m < 0$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, 且 K_A 具紧台, 则 A 可延拓为由 $L_2(X)$ 到 $L_2(X)$ 的紧算子.

证 由 K_A 具紧台及 $m < 0$, 知(28)成立.

注2 这里介绍的有界性定理, 是 Hörmander 在其著名论文“Fourier Integral Operators, I”中给出的. 在此之前, 他曾在“拟微分算子与亚椭圆方程”(见 Proc. Symp. Pure Math. 10(1966)138-183)一文中用较复杂的推导给出如下结果.

设 $P(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$, 且具性质

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta P(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{-\rho(|\alpha| + \delta|\beta|)},$$

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n, \quad (30)$$

其中 $C_{\alpha, \beta}$ 不依赖于 (x, ξ) , 则有

$$\|P(x, D)u\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

显然, 对于 K_A 具紧台的零阶拟微分算子, 条件 (30) 是成立的.

关于 L_2 估计的更深入的讨论, 还可参阅 L. Hörmander, Comm. Pure Appl. Math., 24(1971)671-704.

注3 A. P. Calderon 及 R. Vaillancourt 对有界性定理作了重大改进, 其结果如下

设 $a(x_1, x_2, \xi) \in C^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_n)$, 并满足估计

$$|D_{x_j}^\alpha D_{\xi_j}^\beta a(x_1, x_2, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-m - \rho + |\alpha| + \delta_j + |\beta|} \quad (31)$$

$$0 \leq |\beta| \leq 2 \left[\frac{n}{2} \right] + 2, \quad 0 \leq |\alpha| \leq 2m_j,$$

$$0 \leq \rho \leq \delta_j < 1, \quad j = 1, 2,$$

m_j 则为满足不等式 $m_j(1 - \delta_j) \geq \frac{5}{4}n$ 的最小整数, 记 $\|a\|$ 为使

(31) 成立的最小常数 C . 若 a 关于 ξ 具紧台, 且 $\frac{m}{n} \geq \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$

$-\rho$, 则算子

$$(Af)(x_1) = \iint e^{i(x_1 - x_2, \xi)} a(x_1, x_2, \xi) f(x_2) dx_2 \cdot \xi. \quad (32)$$

在 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 中有界, 且 $\|A\| \leq C'\|a\|$, 这里 C' 与 δ_1, δ_2, ρ 及 n 有关, 但与 a 的台无关.

这个结果在一般线性偏微分方程 $P(x, D)u = f$ 的局部可解性理论中有重要的应用.

L_2 中有界性的最近讨论见:

R. Beals, Comm. PDE, 2(1977)1063-1070;

H. O. Cordes, J. Funct. Anal., 18(1975) 115-131;

L. Hörmander, Comm. Pure Appl. Math., 32 (1979) 359-443.

注4 拟微分算子在 $L_p(1 < p < \infty)$ 中有界性的讨论也很多, 主要文章有

R. Beals, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 29:3(1979)239-260;

R. Illner, Comm. PDE, 2(1977)359-393.;

R. R. Coifman, Y. Meyer, Asterisque, 57(1978)1-185.;

M. Nagase, Comm. PDE, 2(1977)1045-1061.

3.5.3 Gårding不等式

利用引理4, 可给出著名的Gårding不等式, 即下面的结果。

定理5 设拟微分算子 $A \in L_{p-\delta}^m(X)$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. 若存在与 (x, ξ) 无关的常数 $C > 0$, 使

$$\operatorname{Re} \sigma_A(x, \xi) \geq C |\xi|^m. \quad (\text{对大的} |\xi|), \quad (33)$$

则对每个紧集 $K \subset X$ 及每个实数 s , 有

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq C_0 \|u\|_{\frac{m}{2}}^2 - C_1 \|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K), \quad (34)$$

其中常数 $C_0 > 0$, $C_1 > 0$, 不依赖于 u , 而

$$\|u\|_s^2 \equiv \int (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

证 先设 $m = 0$. 据假定(33), 知有

$$\operatorname{Re} \sigma_A(x, \xi) \geq C \quad (|\xi| \geq r), \quad (35)$$

记 $A_1 = \frac{A + A^*}{2} - \frac{C}{4}I$, I 为恒等算子, 则 $A_1^* = A_1$, 且

$$\sigma_{A_1}(x, \xi) = \operatorname{Re} \sigma_A(x, \xi) - \frac{C}{4} + r_1(x, \xi), \quad (36)$$

其中 $r_1 \in S_{\rho}^{-\rho-0}$, 故有估式

$$|r_1(x, \xi)| \leq C'(K)(1 + |\xi|)^{-(\rho-0)}, \quad x \in K, \quad \xi \in \mathbb{R}_n.$$

由此及(35)、(36)可得

$$\liminf_{\substack{t \rightarrow \infty, \\ x \in K, \\ |\xi| \geq t}} \operatorname{Re} \sigma_{A_1}(x, \xi) > \frac{C}{4} > 0. \quad (37)$$

据引理 4 知存在 $B \in L_{\rho-0}^0$, 使 $A_1 = B^*B + R \in L^{-\infty}$. 由于

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle &= \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \frac{1}{2} \overline{\langle Au, u \rangle} \\ &= \frac{1}{2} \langle Au, u \rangle + \frac{1}{2} \langle u, Au \rangle = \left\langle \frac{A + A^*}{2}, u \right\rangle \\ &= \langle A_1 u, u \rangle + \frac{C}{4} \|u\|^2, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle &= \langle B^*Bu, u \rangle + \langle Ru, u \rangle + \frac{C}{4} \|u\|^2 \\ &= \|Bu\|^2 + \frac{C}{4} \|u\|^2 + \langle Ru, u \rangle. \end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq \frac{C}{4} \|u\|^2 - |\langle Ru, u \rangle|, \quad Au \in C_0^\infty(K) \quad (38)$$

记 R 的核为 $r(x, y)$, 有 $r \in C^\infty(X \times X)$. 取 $\psi(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$, 使 ψ 在 $K \times K$ 的某邻域中恒等于 1. 记 $r_K = \psi r$, 则有 $r_K(x, y) \in C_0^\infty(X \times X)$, 且

$$\begin{aligned}
|\langle Ru, u \rangle| &= \left| \iint r_K(x, y) u(y) \overline{u(x)} dy dx \right| \\
&= (2\pi)^{-n} \left| \iint \widehat{r_K}(\xi, \eta) \widehat{u}(\eta) \overline{\widehat{u}(\xi)} d\xi d\eta \right| \\
&\leq (2\pi)^{-n} \iint (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |\eta|^2)^{-\frac{s}{2}} |\widehat{r_K}(\xi, \eta)| \\
&\quad \cdot (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\xi)| (1 + |\eta|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{u}(\eta)| d\xi d\eta \\
&\leq (2\pi)^{-n} \left(\iint (1 + |\xi|^2)^{-s} (1 + |\eta|^2)^{-s} |\widehat{r_K}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right) \left(\int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right),
\end{aligned}$$

即:

$$|\langle Ru, u \rangle| \leq C_0 \|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \quad (39)$$

由(38)及(39)得

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq C_1 \|u\|^2 - C_0 \|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K)$$

故当 $m = 0$ 时, (34) 成立.

对于一般的实数 $m \neq 0$, 可取适拟微分算子 $Q \in L^{\frac{m}{2}}$, 使 $\sigma_Q \equiv (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \pmod{S^{-\infty}}$. 应用证明引理 4 时所采用的逐次逼近法的标准程序, 容易证明存在适拟微分算子 $P \in L^{-\frac{m}{2}}$, 使具性质

$$PQ = I + R, \quad R \in L^{-\infty}.$$

I 为恒等算子. 于是有

$$A = (PQ - R)^* A (PQ - R) = Q^* P^* A P Q - R_1, \quad R_1 \in L^{-\infty},$$

$$\langle Au, u \rangle = \langle (P^* A P)(Qu), Qu \rangle + \langle R_1 u, u \rangle.$$

记 $P^* A P = A_0$, $Qu = v$, 有

$$\langle Au, u \rangle = \langle A_0 v, v \rangle + \langle R_1 u, u \rangle. \quad (40)$$

容易看出 $A_0 \in L_{p,0}^0$, 且由合成算子的特征的渐近展式及条件 (33) 知有 $\operatorname{Re} \sigma_A \geq C'$ (对大的 $|\xi|$). 于是对 A_0 可应用 (38) 得

$$\operatorname{Re} \langle A_0 v, v \rangle \geq \frac{C'}{4} \|v\|^2 - |\langle R_2 v, v \rangle|, \quad R_2 \in L^{-\infty}. \quad (41)$$

由于

$$\langle R_2 v, v \rangle = \langle Q^* R_2 Q u, u \rangle = \langle R_3 u, u \rangle, \quad (42)$$

其中 $R_3 = Q^* R_2 Q \in L^{-\infty}$. 对上式应用估式 (39), 并结合 (40)、(41) 及 (42) 诸式, 即得

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq C_1 \|Qu\|^2 - C_0 \|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K) \quad (43)$$

记 $Q_{\frac{m}{2}} = O_p((1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{4}})$, 据 Q 的定义有

$$Q = Q_{\frac{m}{2}} + R', \quad R' \in L^{-\infty},$$

故得

$$\|Qu\|^2 = \langle Q^* Qu, u \rangle = \langle Q_{\frac{m}{2}}^* Q_{\frac{m}{2}} u, u \rangle + \langle R'' u, u \rangle, \quad (44)$$

其中 $R'' \in L^{-\infty}$. 由 (43) 及 (44) 有

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq C_1 \|Q_{\frac{m}{2}} u\|^2 - C_0' \|u\|_s^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K), \quad (45)$$

但

$$\begin{aligned} \|Q_{\frac{m}{2}} u\|^2 &= \left\| \int e^{i(x \cdot \xi)} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{4}} \widehat{u}(\xi) d\xi \right\|^2 \\ &= \|F^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{4}} \widehat{u}(\xi)]\|^2 \\ &= (2\pi)^{-2n} \|(1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{4}} \widehat{u}(\xi)\|^2 = \|u\|_{\frac{m}{2}}^2 \end{aligned}$$

代入(45), 即得Gårding不等式(33).

注5 不等式(33)最初由Gårding于1953年对微分算子情形得到, 随后Calderon及Zygmund对奇异积分算子也给出类似结果. 近年来在比定理5更弱的假定下, 得到所谓的精确Gårding不等式, 即如下结果

若 $A \in L^m$, 且 $\operatorname{Re} \sigma_A(x, \xi) \geq 0$, 则有

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq -C \|u\|_{(m-1)/2}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K)$$

Hörmander于1979年还将这一结果改进为:

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \geq -C \|u\|_{\frac{m}{2} - \frac{\epsilon}{1-\epsilon}}^2, \quad \forall u \in C_0^\infty(K)$$

详见前引文献.

Gårding不等式是建立椭圆型算子的先验估计式的重要而基本的工具.

3.6 波 锋 集

3.6.1. 广函的波锋集

定义1 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, X 为 \mathbb{R}^n 中的域. 对 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_+ \setminus 0)$, 若存在 x^0 的邻域 $\omega_\delta \equiv \{x: |x - x^0| < \delta\}$ 及 $v \in \mathcal{D}'(X)$, 满足下列两个条件:

1) $v|_{\omega_\delta} = u|_{\omega_\delta}$, 这里 $u|_{\omega_\delta}$ 表示 u 在 ω_δ 中的缩射,

2) v 的Fourier变换 $\hat{v}(\xi)$ 在 ξ^0 的某个锥邻域 $\Gamma_\epsilon \equiv \left\{ \xi: \left| \frac{\xi}{|\xi|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|} \right| < \epsilon \right\}$ 中急降, 即: 对每个自然数 N , 有常数 $C_N > 0$,

使

使

$$|\widehat{v}(\xi)| \leq C_N(1+|\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1)$$

即称 (x^0, ξ^0) 不属于广函 u 的波锋集, 记为: $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$; 而波锋集 $WF(u)$ 便定义为 $X \times (R_n \setminus 0)$ 中所有不具上述性质的点 (x, ξ) 的集合.

容易由定义知 $WF(u)$ 是 $X \times (R_n \setminus 0)$ 中的闭锥集.

引理1 设 $\varphi \in C_0^\infty(X)$, 则有 $WF(\varphi u) \subset WF(u)$.

证 只须证明 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u) \Rightarrow (x^0, \xi^0) \notin WF(\varphi u)$.

若 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 则有 $v \in \mathcal{S}'(X)$ 满足定义1中的要求1)及2). 记 $v_1 = \varphi v$, 只须验证 $\widehat{\varphi v}(\xi)$ 在 $\Gamma_{\varepsilon'}$ 中满足估计式(1), 这里 $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. 由于

$$\begin{aligned} \widehat{v_1}(\xi) &= \widehat{\varphi v}(\xi) = (2\pi)^{-n} \widehat{\varphi} * \widehat{v} = \int \widehat{v}(\xi - \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta \\ &= \int_{|\eta| \leq \lambda|\xi|} \widehat{v}(\xi - \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta \\ &\quad + \int_{|\eta| > \lambda|\xi|} \widehat{v}(\xi - \eta) \widehat{\varphi}(\eta) d\eta \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

其中 λ 为待定的正参数. 现在选择 λ , 使当 $|\eta| \leq \lambda|\xi|$ 及 $|\xi| \in \Gamma_{\varepsilon'}$ 时, 有 $\xi - \eta \in \Gamma_\varepsilon$. 为此可要求 λ 满足下面的估计式

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi - \eta}{|\xi - \eta|} - \frac{\xi^0}{|\xi^0|} \right| &\leq \left| \frac{\xi - \eta}{|\xi - \eta|} - \frac{\xi}{|\xi|} \right| + \varepsilon' \\ &\leq \left| \frac{|\xi| - |\xi - \eta|}{|\xi - \eta| |\xi|} \xi - \frac{\eta}{|\xi - \eta|} \right| + \varepsilon' \\ &\leq \varepsilon' + \frac{2|\eta|}{||\xi| - |\eta||} \leq \varepsilon' + \frac{2\lambda}{1 - \lambda}. \end{aligned}$$

由此知可取 λ , 使 $0 < \lambda < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{2 + (\varepsilon - \varepsilon')}$. 于是当 $\xi \in \Gamma_{\varepsilon'}$ 时, 有

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int_{|\eta| \leq \lambda |\xi|} C_N (1 + |\xi - \eta|)^{-N} |\widehat{\varphi}(\eta)| d\eta \\
&\leq C_N (1 - \lambda)^{-N} (1 + |\xi|)^{-N} \int |\widehat{\varphi}(\eta)| d\eta \\
&\leq C'_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma_+.
\end{aligned}$$

为估计 I_2 , 注意 $\widehat{\varphi}(\eta)$ 关于 η 急降, 而 $\widehat{v}(\eta)$ 关于 η 为幂增的, $|\widehat{v}(\eta)| \leq C_p (1 + |\eta|)^p$, p 为某个正整数. 于是

$$|I_2| \leq C_p C_l \int_{|\eta| > \lambda |\xi|} (1 + |\xi - \eta|)^p (1 + |\eta|)^{-l} d\eta,$$

其中 l 为任意的正整数. 特别取 $l > N + n + 1 + 2p$, 可得:

$$|I_2| \leq C''(N) (1 + |\xi|)^{-N}$$

故当 $\xi \in \Gamma_+$ 时, 估式(1)对 v_1 成立.

推论1 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$, 则 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$ 的充要条件是: 存在 $\varphi(x) \in C_0^\infty(X)$, 使 φ 在 x^0 的某邻域 ω_δ 中恒等于 1, 且 $\widehat{\varphi u}(\xi)$ 在 ξ^0 的某个锥邻域 Γ_+ 中急降, 即满足估式(1).

引理2 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, 则有

$$\pi_x WF(u) = \text{sing supp } u.$$

这里 π_x 是 $X \times \mathbb{R}_n$ 到 X 的自然投影映射.

证 1) 设 $x^0 \notin \text{sing supp } u$, 则在 x^0 的某个邻域 ω_δ 中有 $u \in C^\infty(\omega_\delta)$. 取 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\omega_\delta)$ 且在 $\omega_{\delta'}$ 中 $\varphi \equiv 1$, $0 < \delta' < \delta$, 则 $\varphi u \in C_0^\infty(X)$, 且 $\varphi u|_{\omega_{\delta'}} = u|_{\omega_{\delta'}}$. 显然有 $\widehat{\varphi u}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n)$, 即关于 ξ 急降. 特别地, 对于每个 $\xi^0 \neq 0$, 在 ξ^0 的某邻域 Γ_+ 中, $\widehat{\varphi u}(\xi)$ 满足估式(1). 据推论 1 知 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 故有 x_0

$\notin \pi_x W F(u)$. 这表明 $\pi_x W F(u) \subset \text{sing supp } u$.

2) 若 $x^0 \notin \pi_x W F(u)$, 则对每个 $\xi^* \in R_n \setminus 0$, 有 $(x^0, \xi^*) \notin W F(u)$. 于是有相应的 ω_{ξ^*} 及 $\varphi^*(x) \in C_0^\infty(X)$, 且当 $x \in \omega_{\xi^*}$ 有 $\varphi^* \equiv 1$, 使 $\widehat{\varphi^* u}(\xi)$ 在某 Γ_{ξ^*} 中急降.

当 ξ^* 取遍 $R_n \setminus 0$ 时, $\{\Gamma_{\xi^*}\}$ 覆盖 $R_n \setminus 0$. 记

$$\Gamma'_{\xi^*} = \{\xi: |\xi| = 1, \xi \in \Gamma_{\xi^*}\},$$

则 $\{\Gamma'_{\xi^*}\}$ 覆盖 R_n 中的单位球面 S^{n-1} . 由 S^{n-1} 的紧性, 知存在

有限的子覆盖, 记为 $\{\Gamma'_{\frac{1}{2}\xi_j}\}_{j=1}^N$. 于是有 $\bigcup_{j=1}^N \Gamma'_{\frac{1}{2}\xi_j} = R_n \setminus 0$.

取 $\delta = \min\{\delta_j\}$, 令 $\Phi = \prod_{j=1}^N \varphi_j(x)$, 有 $\Phi(x) \in C_0^\infty(X)$, 且

$\Phi(x)$ 在 ω_δ 中恒等于 1, 而 $\Phi u = (\varphi_1 \cdots \varphi_{j-1} \varphi_{j+1} \cdots \varphi_N) (\varphi_j u) = \psi_j \varphi_j u$, 因 $\varphi_j u(\xi)$ 在 Γ_{ξ_j} 中急降, $\psi_j \in C_0^\infty(X)$, 故 $\widehat{\Phi u} = \psi_j \widehat{(\varphi_j u)}$ 在 $\Gamma'_{\frac{1}{2}\xi_j}$ 中急降 (见引理 1 的证明). 因 j 为 $1, \dots, N$ 中的任

一个, 且 $\Gamma'_{\{\frac{1}{2}\xi_j}\}_{j=1}^N$ 覆盖 $R_n \setminus 0$, 故 $\widehat{\Phi u}$ 在 $R_n \setminus 0$ 中急降, 随之

$\varphi u = \int e^{-i(x \cdot \xi)} \widehat{\varphi u}(\xi) d\xi \in C^\infty(X)$. 但 φ 在 ω_δ 中取值 1, 故 $u \in C^\infty(\omega_\delta)$, 这表明 $x^0 \notin \text{sing supp } u$, 即 $\text{sing supp } u \subset \pi_x W F(u)$.

结合 1) 及 2) 中两种相反包含关系, 即得所论两个集合的重合一致性.

下面利用 ψ DO 来研究波锋集, 并通过波锋集揭示 ψ DO 的特性.

3.6.2 波锋集与拟微分算子

定理1 设 $u \in \mathscr{D}'(X)$, $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 则存在适拟微分算子 $A \in CL^0(X)$, 具备下列两个性质:

1) $\sigma_A \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}$, $\omega_\delta \times \Gamma$ 为 (x^0, ξ^0) 的某锥邻域;

2) $Au \in C_0^\infty(X)$

证 因 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 故存在 $\varepsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ 及 $\varphi(x) \in C_0^\infty(X)$, 且在 x^0 的邻域 ω_{δ_0} 中 $\varphi(x) \equiv 1$, $\widehat{\varphi}u(\xi)$ 在 ξ^0 的锥邻域 Γ_{ε_0} 中急降. 设 δ 为小于 δ_0 的某个正数, 取 $\psi(x) \in C_0^\infty(\omega_{\delta_0})$, 且在 ω_δ 中 $\psi \equiv 1$. 取 $\varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon > 0$, 作 $\tau(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_n \setminus 0)$, 使其下述两个性质.

i) $\tau(\xi)$ 为正齐零次函数;

ii) $\text{supp } \tau \subset \Gamma_{\varepsilon_0}$, 且在 Γ_ε 中 $\tau(\xi) \equiv 1$.

又取 $t(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_n)$, 使当 $|\xi| \leq \frac{1}{4}$ 时 $t(\xi) \equiv 0$, 当 $|\xi| \geq \frac{1}{2}$ 时

$t(\xi) \equiv 1$. 令

$$a(x, y, \xi) = \psi(x)\varphi(y)t(\xi)\tau(\xi),$$

则以 a 作振幅的拟微分算子 A 即为所求. 事实上, 显然有 $A \in L^0(X)$, 且 K_A 具紧台, 故 A 为适 ψ DO. 此外, 有

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} \psi(x) \partial_\xi^a [t(\xi)\tau(\xi)] D_x^a \varphi(x) \quad (2)$$

据3.3.3所述渐近展式的性质7), 知有

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} t\left(\frac{\xi}{2}\right) \psi(x) \partial_\xi^a [t(\xi)\tau(\xi)] D_x^a \varphi(x),$$

即

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_a t\left(\frac{\xi}{2}\right) \frac{1}{a!} \psi(x) \partial_{\xi}^a \tau(\xi) D_x^a \varphi(x), \quad (3)$$

故 $\sigma_A \in CS^0(X \times \mathbb{R}_n)$, 即 $A \in CL^0(X)$.

当 $(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 时, $\tau(\xi)$, $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 都取值 1, 于是由 (2) 得: $\sigma_A(x, \xi) - t(\xi) \in S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)$. 但 $t(\xi) - 1 \in C_0^\infty \subset S^{-\infty}$, 故

$$\sigma_A(x, \xi) \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}.$$

为证 $Au \in C_0^\infty(X)$, 只须注意 Au 可表为

$$Au = \psi(x) \int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} e^{i(x, \xi)} t(\xi) \tau(\xi) (\widehat{\varphi u})(\xi) d\xi,$$

因 $\widehat{\varphi u}(\xi)$ 在 Γ_{ε_0} 中急降, 故可在积分号内对 x 求导, 且所得积分绝对并一致收敛. 由于 $\psi(x) \in C_0^\infty(X)$, 知确有 $Au \in C_0^\infty(X)$.

定理 1 的逆命题可由下述定理推出.

定理 2 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$, $A \in CL^m(X)$, 且或者 A 为适 ψ DO, 或者 $u \in \mathcal{D}'(X)$, 使 Au 有意义, 且 $Au \in C^\infty$. 若 A 的主特征 $a_m(x, \xi)$ 使 $a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$, 则 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$.

为了证明定理 2, 先建立两个引理.

引理 3 设 $A \in CL^m(X)$, 其主特征为 $a_m(x, \xi)$. 若 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ 使 $a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$, 则存在适拟微分算子 $B \in CL^{-m}(X)$, 具性质

$$\sigma_{B \circ A}(x, \xi) \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}, \quad (4)$$

其中 $\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 为 (x^0, ξ^0) 的某个锥邻域.

注 1 $a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$ 表明 A 在点 (x^0, ξ^0) 属椭圆型; 一般, 若 $\text{char}(A) = \phi$, 则称 A 在 X 中为椭圆型拟微分算子. 引理 3 表明: 若 A 在点 (x^0, ξ^0) 属椭圆型, 则局部地存在左拟逆 B , 使

$B \circ A = I + R$, $R \in L^{-\infty}$. 由引理 3 的证明还可知, A 有局部的右拟逆 B_1 , 使 $A \circ B_1 = I + R_1$, $R_1 \in L^{-\infty}$, 且 $B - B_1 \in L^{-\infty}$, 故 B 同时为 A 的局部左拟逆及右拟逆, 而称为 A 的拟逆或参函数 (parametrix).

证 因 $a_m(x^0, \xi^0) \neq 0$, 据 a_m 的连续性以及对 ξ 的正齐 m 次性, 知存在 (x^0, ξ^0) 的锥邻域 $\omega_0 \times \Gamma_0$, 使在其中 $a_m \neq 0$. 设 $t(\xi)$, $\tau(\xi)$ 及 $\psi(x)$ 如定理 1 证明中所述, 令

$$b_0(x, \xi) = \frac{w(x, \xi)}{a_m(x, \xi)}, \quad w(x, \xi) = t(\xi)\tau(\xi)\psi(x),$$

则对于大的 $|\xi|$, b_0 是 ξ 的正齐 $-m$ 次函数, 且 $b_0 \in C^r(X \times \mathbb{R}_n)$, 且 $b_0 \in CS^{-m}(X \times \mathbb{R}_n)$. 于是存在适拟微分算子 $B_0 \in CL^{-m}(X)$, 且 $\sigma_{B_0} \equiv b_0 \pmod{S^{-\infty}}$, 使

$$\begin{aligned} \sigma_{B_0 \circ A} &\equiv \sigma_{B_0} \sigma_A \pmod{S^{-1}} \equiv b_0 \sigma_m \pmod{S^{-1}} \\ &\equiv w(x, \xi) \pmod{S^{-1}}, \end{aligned}$$

即

$$\sigma_{B_0 \circ A} = w(x, \xi) + r(x, \xi), \quad r(x, \xi) \in S^{-1}(X \times \mathbb{R}_n). \quad (5)$$

取 $R \in CL^{-1}(X)$, 使满足要求

$$\sigma_R \equiv r(x, \xi) \pmod{S^{-\infty}}, \quad (6)$$

再取 $Q \in CL^{-1}(X)$, 使其特征具渐近展式

$$\sigma_Q \sim 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_R^j, \quad (7)$$

则 $B = QB_0$ 即为所求. 事实上, 由 (7) 知, 对每个大于 1 的整数 N , 有

$$Q \equiv I + \sum_{j=1}^{N-1} R^j \pmod{S^{-N}},$$

I 为恒等算子。故

$$\begin{aligned} BA &= QB_0A \equiv (I + R + \dots R^{N-1})(B_0A) \pmod{S^{-N}} \\ &\equiv (I + R + R^2 + \dots + R^{N-1})(I - R) \\ &\quad + Q(B_0A + R - I) \pmod{S^{-N}} \\ &\equiv I - R^N + Q(B_0A + R - I) \pmod{S^{-N}} \\ &\equiv I + Q(B_0A + R - I) \pmod{S^{-N}}. \end{aligned}$$

记 $B_0A + R - I = H$, 据(5)及(6)知 $\sigma_H \equiv w - 1 \pmod{S^{-\infty}}$, 于是

$$\begin{aligned} \sigma_{BA} &\equiv 1 + \sigma_{QH} \pmod{S^{-N}} \\ &\equiv 1 + \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} \partial_x^\alpha \sigma_Q D_x^\alpha (w - 1) \pmod{S^{-N}}. \end{aligned}$$

特别当 $(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 时, 由 w 的定义知 $D_x^\alpha (w - 1) = 0$, $|\alpha| \neq 0$, 故得

$$\sigma_{BA} \equiv 1 + \sigma_Q(w - 1) \pmod{S^{-N}}, \quad (x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon,$$

但 $w - 1 \in C^\infty$, 且当 $(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 时及 $|\xi| \geq 1$ 时, $w - 1 \equiv 0$. 这表明 $w - 1 \in S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)$. 由此知

$$\sigma_{BA} \equiv 1 \pmod{S^{-N}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)},$$

由 N 的任意性知(4)成立.

引理 4 设 $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\tau(\xi) \in S_{p,0}^m$, $0 < p \leq 1$, $\tau(D) = O_p(\tau(\xi))$, 则当 $d(x, \text{supp } v) \geq 1$ 时, 对每个自然数 N 及每个指标组 α 有

$$|D_x^\alpha \tau(D)v| \leq C_\alpha(N)(1 + |x|)^{-N}. \quad (8)$$

这里 $d(x, U)$ 记点 x 到集 U 的距离: $d(x, U) = \inf_{y \in U} |x - y|$.

证 首先指出, 只须对 $v \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 的特殊情形证明 估 式

(8). 事实上, 由紧台广函的结构定理(见2.2.3)知有

$$v = \sum_{|\beta| \leq p} D_x^\beta v_\beta, \quad v_\beta \in C_0(R^n),$$

故若(8)对 $v_\beta \in C_0(R^n)$ 成立, 则它对 $v \in \mathcal{D}'(R^n)$ 也成立.

其次, 对于每个 α , 记 $D^\alpha \tau_\alpha(D) = \tau_\alpha(D)$, 则有 $\tau_\alpha(D) \in L_{p, 0}^{m+|\alpha|}$, 且 $\tau_\alpha(D) = O_p(\xi^\alpha \tau(\xi))$, 故只须对 $|\alpha| = 0$ 的情形证明估式(8), 然后对一般的 α , 换 $\tau(D)$ 为 $\tau_\alpha(D)$ 即得(8).

于是问题简化为: 对 $v \in C_0(R^n)$, 证明

$$|\tau(D)v| \leq C(N)(1+|x|)^{-N}, \quad (d(x, \text{supp} v) \geq 1), \quad (8')$$

N 为任意整数且 $N > 1$.

注意对每个 $u \in C_0^\infty(R^n)$, 当 $d(x, \text{supp} u) \geq \delta > 0$ 时, $|x-y| \neq 0$, $y \in \text{supp} u$, 故有

$$\begin{aligned} \tau(D)u &= \iint e^{i(x-y \cdot \xi)} \tau(\xi) u(y) dy d\xi \\ &= \iint |x-y|^{-2N} e^{i(x-y \cdot \xi)} (-\Delta_\xi)^N \tau(\xi) u(y) dy d\xi. \end{aligned} \quad (9)$$

由于 C_0^∞ 在 C_0 中稠, 利用(9)容易证明: 当 $v \in C_0$ 时, 若 $d(x, \text{supp} v) \geq 1$, 则有

$$\tau(D)v = \iint |x-y|^{-2N} (-\Delta_\xi)^N \tau(\xi) v(y) dy d\xi, \quad (10)$$

取 N 充分大, 使 $m-2N\rho \leq -(n+1)$, 由(10)可得估计

$$|\tau(D)v| \leq C_N [d(x, \text{supp} v)]^{-2N} = C_N |x-x^0|^{-2N}, \quad (11)$$

这里 x^0 是紧集 $\text{supp} v$ 上的某点, 可依赖于 x . 因

$$\begin{aligned} |x-x^0|^{-2N} &= \left(\frac{1+|x|}{|x-x^0|} \right)^{2N} (1+|x|)^{-2N} \\ &\leq \left(1 + \frac{1+|x|}{|x-x^0|} \right)^{2N} (1+|x|)^{-2N}, \end{aligned}$$

故有

$$|x - x^0|^{-2N} \leq (2 + R)^{2N} (1 + |x|)^{-2N}, \quad (12)$$

其中 R 为包含紧集 $\text{supp } v$ 的某个球的半径. 结合 (11) 及 (12) 即得 (8')

$$|\tau(D)v| \leq C'_N (1 + |x|)^{-2N} \leq C_N (1 + |x|)^{-N}.$$

定理 2 的证明. 为确定起见, 不妨设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, A 为适 ψ DO. 据引理 3 知, 存在适拟微分算子 $B \in CL^{-m}$, 使 $A_1 = BA$ 满足下面两个要求:

- 1) $A_1 \in CL^0$, 且 $A_1 u \in C^\infty(X)$;
- 2) $\sigma_{A_1} \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times F_\varepsilon)}$, $\omega_\delta \times F_\varepsilon$ 为 (x^0, ξ^0) 的某个锥邻域.

取 $\varphi(x) \in C_0^\infty(\omega_\delta)$, 且在 ω_{δ_1} 上 $\varphi \equiv 1$, $0 < \delta_1 < \delta$. 只须证明 $\widehat{\varphi u}(\xi)$ 在 Γ_{ε_1} 中急降, 这里 $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon$. 为此取 $\tau(\xi) \in S^0(\mathbf{R}_n)$, $\text{supp } \tau \subset F_\varepsilon$, 且在 Γ_{ε_1} 中 $\tau \equiv 1$. 今证 $\tau(\xi) \widehat{\varphi u}(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_n)$, 或等价的结论

$$F^{-1}[\tau(\xi) \widehat{\varphi u}(\xi)] \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad (10)$$

记 $\tau(D) = O_p(\tau(\xi))$, 则 (10) 可改写为:

$$\tau(D)(\varphi u)(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}_n). \quad (10')$$

现在应用引理 4 证明 (10'). 当 $d(x, \text{supp } \varphi) \geq 1$ 时有

$$|D_x^\alpha \tau(D)(\varphi u)(x)| \leq C_\alpha(N) (1 + |x|)^{-N}. \quad (11)$$

剩下只须证明 $\tau(D)(\varphi u)(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 为此改写

$$\tau(D)(\varphi u) = \tau(D)\varphi(I - A_1)u + \tau(D)\varphi(A_1 u), \quad (12)$$

因 $A_1 u \in C^\infty(X)$, $\varphi \in C_0^\infty(\omega_\delta)$, 故 $\varphi A_1 u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 随之

$$\tau(D)\varphi(A_1 u) \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \quad (13)$$

记 $B = \tau(D)\varphi(I - A_1)$, 今证 $B \in L^{-\infty}(\mathbf{R}^n)$. 显然存在适拟微

分算子 $\tau_1(D)$, 使 $\tau_1(D) \equiv \tau(D) \pmod{L^{-\infty}(R_*)}$, 故可认为 $\tau(D)$ 为适 ψ DO, 且 $\sigma_{\tau(D)} \equiv \tau(\xi) \pmod{S^{-\infty}}$. 于是

$$\sigma_B(x, \xi) \sim \sum_a \frac{1}{a!} \partial_{\xi}^a \tau(\xi) D_x^a \{ \varphi(x) [1 - \sigma_{A_1}(x, \xi)] \}. \quad (14)$$

当 $\xi \notin \Gamma_\varepsilon$ 时, 有 $\tau(\xi) \equiv 0$; 当 $x \notin \omega_\delta$ 时, $\varphi(x) \equiv 0$; 而当 $(x, \xi) \in \omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 时, 有 $\sigma_{A_1}(x, \xi) - 1 \in S^{-\infty}$, 故由 (14) 知 $\sigma_B(x, \xi) \in S^{-\infty}(X \times R_*)$, 即 $B \in L^{-\infty}(R^*)$. 故 B 为具核 $b(x, y) \in C^\infty(R^n \times R^n)$ 的积分算子. 于是, 对每个 $v \in C_0^\infty(R^n)$, 有

$$(Bu, v) = (u, {}^t Bv) = \left(u, \int b(x, y) v(x) dx \right) = (u(b), v).$$

显然有 $u(b) \equiv b_1(x) \in C^\infty(R^n)$, 故 $Bu \in C^\infty(R^*)$. 结合 (12) 及 (13)' 即得 $\tau(D)(\varphi u) \in C^\infty(X)$.

综合上面所证, 知定理 2 成立.

推论 2 设 $A \in CL^m(X)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$, 且或者 A 为适 ψ DO, 或者 $u \in \mathscr{D}'(X)$, 使 Au 有意义. 若 $Au \in C^\infty(X)$, 则

$$WF(u) \subset \text{char}(A).$$

特别若 $\text{char}(A)$ 为空集, 即 A 为椭圆 ψ DO, 则当 $Au \in C^\infty(X)$ 时, 有 $u \in C^\infty(X)$.

推论 3 设 $u \in \mathscr{D}'(X)$, 记 $\mathscr{A}_u = \{A: Au \in C^\infty(X), A \in L^0(X)\}$, 则有

$$WF(u) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}_u} \text{char}(A). \quad (15)$$

证 1) 由推论 2 知 $WF(u) \subset \bigcap_{A \in \mathscr{A}_u} \text{char}(A)$.

2) 设 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 由定理 1 知存在适拟微分算子 $A_0 \in CL^0(X)$, 使 $A_0 u \in C^\infty(X)$, 即 $A_0 \in \mathscr{A}_u$, 且

$$\sigma_{A_0} \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}$$

记 A_0 的主特征为 σ_0 , 有

$$\sigma_0 \equiv 1 \pmod{S^{-1}(\omega_\delta \times F_\varepsilon)},$$

则 $\nu \equiv \sigma_0 - 1 \in S^{-1}(\omega_\delta \times F_\varepsilon)$. 因 σ_0 关于 ξ 为正齐零次函数. 故

$$\begin{aligned} |\sigma_0(x^0, \xi^0) - 1| &= |\sigma_0(x^0, t\xi^0) - 1| \\ &= |\nu(x^0, t\xi^0)| \leq C(1 + t|\xi^0|)^{-1}. \end{aligned}$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 得 $\sigma_0(x^0, \xi^0) = 1$, 这表明 $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(A_0)$.

因 $A_j \in \mathscr{A}_\mu$, 故 $(x^0, \xi^0) \notin \bigcap_{A \in \mathscr{A}_\mu} \text{char}(A)$, 即 $WF(u) \supset \bigcap_{A \in \mathscr{A}}$

$\text{char}(A)$.

结合 1) 及 2), 知 (15) 成立.

注 2 若 $u \in \mathscr{D}'(X)$, 用 \mathscr{A}'_μ 记 \mathscr{A}_μ 中所有适 ψ DO 所构成的子集, 则同样可证

$$WF(u) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}'_\mu} \text{char}(A). \quad (15')$$

定理 3 设 $u \in \mathscr{D}'(X)$, $A \in CL^m(X)$, 且或者 $u \in \mathscr{E}'(X)$, 或者 A 为适 ψ DO, 则有

$$WF(u) \subset \text{char}(A) \cup WF(Au). \quad (16)$$

证 设 $(x^0, \xi^0) \in X \times (R_n \setminus 0)$. 若 $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(A)$ 且 $(x^0, \xi^0) \notin WF(Au)$, 今证 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 则 (16) 成立.

由 $(x^0, \xi^0) \notin WF(Au)$ 及定理 1, 知存在适拟微分算子 $P \in CL^0(X)$, 使 $P(Au) \in C^\infty_0(X)$, 且在 (x^0, ξ^0) 的某个锥邻域 $\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 中有 $\sigma_P \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}}$, 于是 $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(P)$ (参看推论 3 的证明). 又因 $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(A)$, 而 PA 的主特征等于 P 及 A 各自的主特征相乘, 故有

$$(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(PA) = \text{char}(P) \cup \text{char}(A),$$

由此知 PA 满足定理 2 的条件, 故 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$.

定理 4 设 $u \in \mathscr{D}'(X)$, $A \in CL^m(X)$, 且或者 $u \in \mathscr{E}'(X)$, 或者 A 为适 ψ DO, 则有

$$WF(Au) \subset WF(u). \quad (17)$$

注3 (17)是拟局部性(见3.2.3)的精确化,称为微局部性.

证 设 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u)$, 只须证 $(x^0, \xi^0) \notin WF(Au)$. 据定理3知: 或者 $(x^0, \xi^0) \notin WF(Au)$, 或者 $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(A)$. 在后一种情况, 由引理3知存在适拟微分算子 $Q \in CL^{-m}(X)$, 使 σ_Q 在某锥集 $\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 外恒为零, 且

$$\sigma_{QA} \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}, \quad (18)$$

又据定理1知: 存在适拟微分算子 $P \in CL^0(X)$, 使

$$Pu \in C_0^\infty(X); \quad \sigma_P \equiv 1 \pmod{S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon)}. \quad (19)$$

现在考察合成算子

$$(QA)u = QA(I-P)u + (QA)Pu \quad (20)$$

由 $Pu \in C_0^\infty(X)$, 知 $(QA)Pu \in C^\infty(X)$. 另一方面, 直接由 $QA(I-P)$ 的符征的渐近展式知有

$$\sigma_{QA(I-P)} \in S^{-\infty}(\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon),$$

因 σ_Q 在 $\omega_\delta \times \Gamma_\varepsilon$ 外恒等于零, 故

$$\sigma_{QA(I-P)} \in S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}_n),$$

于是 $QA(I-P) \in L^{-\infty}(X \times \mathbb{R}_n)$, 由此知 $QA(I-P)u \in C^\infty(X)$. 结合(20)得 $Q(Au) \in C^\infty(X)$. 故 Q 关于 $v = Au$ 而言, 满足定理2的一切条件, 因此有 $(x^0, \xi^0) \notin WF(v) = WF(Au)$.

故不论在哪种情况, 都有 $(x^0, \xi^0) \notin WF(Au)$.

推论4 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, $A \in CL^m(X)$, 且或者 $u \in \mathcal{E}'(X)$, 或者 A 为适 ψ DO, 则有:

$$WF(Au) \subset WF(u) \subset \text{char}(A) \cup WF(Au) \quad (21)$$

推论5 设 $A \in CL^m(X)$ 为椭圆型 ψ DO, 则有

$$WF(Au) = WF(u). \quad (22)$$

注4 满足(22)的 ψ DO称为严格亚椭圆算子. 推论5表明椭圆算子必为严格亚椭圆算子.

3.6.3 广函的微局部化及乘积

定义2 设 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$, 引进商空间

$$\mathscr{D}'(x^0, \xi^0) = \mathscr{D}'(X) / \{u : u \in \mathscr{D}'(X), (x^0, \xi^0) \in WF(u)\}, \quad (23)$$

而称为 (x^0, ξ^0) 处的微广函空间或广函空间 $\mathscr{D}'(X)$ 在 (x^0, ξ^0) 处的微局部化.

定理4 表明, 每个经典适拟微分算子 A 引出线性映射

$$A : \mathscr{D}'(x^0, \xi^0) \rightarrow \mathscr{D}'(x^0, \xi^0),$$

若更假定 A 在 (x^0, ξ^0) 为椭圆型的, 则这个映射是可逆的.

很多重要的广函空间都可以微局部化. 特别地, 空间 $H_*(\mathbb{R}^n)$ 可微局部化. 下面对它作简要的介绍.

为了便于理解, 先引进 $H_*(\mathbb{R}^n)$ 在点 $x^0 \in X$ 的局部化概念.

$$H_*(\mathbb{R}^n) = \left\{ \varphi(x) : \|\varphi\|_*^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}.$$

定义3 称广函 u 在点 $x^0 \in X$, 属于 $H_{\frac{1}{2}}^{1,0,0}(X)$, 若存在某 $\varphi(x) \in C_0(X)$, $\varphi(x^0) \neq 0$, 使 $\varphi u \in H_*$ (这表明广函 u 在 x^0 的某邻域 ω 上的缩象属于 $H_*(\omega)$).

类似地, 可定义广函 u 在 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$ 属于 $H_{\frac{1}{2}}^{1,0,0}$ 如下.

定义4 设 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$, $u \in \mathscr{D}'(X)$. 若有某个适拟微分算子 $A \in CL^0(X)$, $(x^0, \xi^0) \notin \text{char}(A)$, 使 $Au \in H_{\frac{1}{2}}^{1,0,0}(X)$, 则称在 (x^0, ξ^0) 有 $u \in H_{\frac{1}{2}}^{1,0,0}(x^0, \xi^0)$.

命题1 设 u 在 (x^0, ξ^0) 属于 $H_{\frac{1}{2}}^{1,0,0}(X)$, 则 u 可分解为

$$u = u_1 + u_2, \quad (24)$$

其中 $u_1 \in H^1_{\text{loc}}(X)$, 且 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u_2)$.

反之, 若 $u \in \mathcal{D}'(X)$ 有上述分解 (24), 则对每个具下述性质的 A , 有 $Au \in H_{\text{loc}}$. 这里 A 满足要求: $A \in CL^0(X)$, 且在 (x^0, ξ^0) 的不与 $WF(u_2)$ 相交的锥邻域 $\omega \times \Gamma$ 中, 有:

$$\sigma_A \equiv O(\text{mod } S^{-\infty}(\omega \times \Gamma)). \quad (25)$$

证 1) 因 A 在 (x^0, ξ^0) 为椭圆型算子, 故存在 $B \in CL^0(X)$, 使 $BA = I + R$, 且 R 在 (x^0, ξ^0) 的某个锥邻域 $\omega \times \Gamma$ 中属 $L^{-\infty}$, 即 $\sigma_R \equiv O(\text{mod } S^{-\infty}(\omega \times \Gamma))$, 于是

$$u = BAu + (-Ru) = u_1 + u_2,$$

其中 $u_1 = BAu \in H^1_{\text{loc}}(X)$, $u_2 = -Ru$. 显然有 $(x^0, \xi^0) \notin WF(u_2)$.

2) 逆命题是显然的, 只须注意 $A(H_{\text{loc}}) \subset H_{\text{loc}}$.

推论 6 u 在 (x^0, ξ^0) 属于 $H^1_{\text{loc}}(X)$ 的充要条件是: u 有命题 1 所述性质的分解 (24).

命题 1 表明下述定义是十分自然的.

定义 5 设 $(x^0, \xi^0) \in X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0)$, 记

$$H_{\text{loc}}(x^0, \xi^0) = H^1_{\text{loc}}(X) / \{u; u \in H^1_{\text{loc}}(X), (x^0, \xi^0) \notin WF(u)\}, \quad (27)$$

而称为 H_{loc} 在点 (x^0, ξ^0) 的微局部化.

对于其它类型的广函空间 F , 只要具性质

$$(CL^0)F \subset F$$

都可通过上述途径把它微局部化.

微局部化的重要作用在于: 它可使奇性的分析大为简化及精确化. 由于牵涉较多, 这里不可能详细论述.

下面转入波锋集在广函乘法问题上的应用.

设 $u_j \in \mathcal{D}'(X)$, $j = 1, 2$. 若

$$WF(u_1) + WF(u_2) \subset X \times (\mathbb{R}_n \setminus 0), \quad (27)$$

即若不存在 $(x^0, \xi^0) \in WF(u_1)$, 使 $(x^0, -\xi^0) \in WF(u_2)$, 则可定义乘积 $u_1 u_2 \in \mathcal{D}'(X)$.

事实上, 因乘法为双线性运算, 利用单位分解, 可认为 u_1 及 u_2 都属于 $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, 且它们的台都充分小, 使 $\widehat{u_1}(\xi)$ 在锥 Γ_1 外急降, $\widehat{u_2}(\xi)$ 在锥 Γ_2 外急降, 且 $\Gamma_1 \div \Gamma_2 \subset \mathbb{R}_n \setminus 0$, 即 Γ_1 及 Γ_2 中每一个都不含另一个的对径点(点 (x, ξ) 及 $(x, -\xi)$ 互为对径点). 在通常情形

$$\widehat{u_1 u_2}(\xi) = \widehat{u_1} * \widehat{u_2} = \int \widehat{u_1}(\xi - \eta) \widehat{u_2}(\eta) d\eta. \quad (28)$$

在上述条件(27)下, 积分(28)绝对收敛. 事实上, 当 $|\eta| \rightarrow \infty$ 时, 或者 $u_1(\xi - \eta)$ 急降, 或者 $u_2(\eta)$ 急降, 故(28)绝对收敛, 而可定义积 $u_1 u_2$ 如下:

$$u_1 u_2 = F^{-1} \left[\int \widehat{u_1}(\xi - \eta) \widehat{u_2}(\eta) d\eta \right] \quad (29)$$

例如, 若 $\tau(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\int \tau(x) dx = 1$, $0 \leq \tau \leq 1$. 记

$$\tau_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \tau\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); \quad u_j^{(\varepsilon)} = u_j * \tau_\varepsilon \in C_0^\infty, \quad j = 1, 2,$$

则在 \mathcal{D}' 中收敛性定义下有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j^{(\varepsilon)} = u_j$, $j = 1, 2$. 故在(29)的意义下有

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_1^{(\varepsilon)} u_2^{(\varepsilon)} = u_1 u_2.$$

这表明用(29)定义某些广函乘积的合理性.

例1 设 $u_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $k \in \mathbb{R}^1$, 如下作用于 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$(u_k, \varphi) = \int f_k(x_1) \varphi(x, kx_1) dx_1, \quad f_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),$$

即 $\text{supp } u_k \subset \{(x_1, x_2): x_2 = kx_1\}$. 考虑积 $u_0 u_k$. 因

$$\widehat{u}_k(\xi) = \int f_k(x_1) e^{-i(\xi_1 x_1 + \xi_2 k x_1)} dx_1 = \widehat{f}_k(\xi_1 + k\xi_2),$$

故 $WF(u_k)$ 为位于 $\pi_1^{-1}(\text{supp } f_k)$ 而垂直于直线 $x_2 = kx_1$ 的所有法线的集合。这里 $\pi_1: (x_1, kx_1) \rightarrow x_1$ 。由于

$$\begin{aligned} (\widehat{u}_0 * \widehat{u}_k)(\xi) &= \int \widehat{f}_0(\xi_1 - \eta_1) \widehat{f}_k(\eta_1 + k\eta_2) d\eta_1 d\eta_2 \\ &= \int \widehat{f}_0(\eta_1) d\eta_1 \int \widehat{f}_k(k\eta_2) d\eta_2 = \frac{1}{k} f_0(0) f_k(0), \end{aligned}$$

故得 $u_0 u_k = \frac{1}{k} f_0(0) f_k(0) \delta(x_1, x_2)$ 。当 $k \rightarrow 0$ 时极限不存在，

即积 $u_0 u_0$ 无定义，因这时条件(27)不成立。

所有上述结论，也可直接由 $u_k = f_k(x_1) \delta(x_2 - kx_1)$ 推出。事实上， $u_0 u_0$ 及 $u_k u_k$ 都无意义，正是由于 $\delta(x_2) \delta(x_2)$ 及 $\delta(x_2 - kx_1) \delta(x_2 - kx_1)$ 都无定义所致。也可由

$$WF(u_k) = \{(x_1, kx_1, -kx_2, \xi_2)\}$$

知积 $u_k \cdot u_k$ 不存在。*)

3.6.4 奇性传播

最后介绍一下奇性传播定理的一种最简单的形式。为此先引进副特征(Bicharacteristics)概念。

设 $a(x, \xi)$ 为定义于 $X \times \mathbb{R}_n$ 的实值光滑函数。考虑由 $a(x, \xi)$ 引出的Hamilton组

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial a}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial a}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (30)$$

定义6 常微分方程组(30)的积分曲线 $(x(t), \xi(t))$ 称为函数 $a(x, \xi)$ 的副特征；若它使 $a(x(t), \xi(t)) \equiv 0$ ，即称为零副特

• 这种处理乘积的方法，当然比2.4中的讨论局限性大得多。关于这一方面的改进工作，见：W. Ambrose, J. für reine angew. Math., 315(1980)73-91.

征。

定理5 $a(x, \xi)$ 是(30)的首次积分, 即: 若 $(x(t), \xi(t))$ 是 a 的副特征, 则有 $a(x(t), \xi(t)) \equiv \text{const.}$

证 由(30)可算出

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}(x(t), \xi(t)) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \frac{d\xi_j}{dt} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial a}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial a}{\partial \xi_j} - \frac{\partial a}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_j} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

故沿副特征有 $a \equiv \text{const.}$

这个定理使零副特征的定义有合理基础。

定理6 设 $P \in CL^m(X)$, 其主符征 $p_m(x, \xi)$ 取实值, $u \in \mathcal{D}'(X)$, 且或 P 具适台, 或 $u \in \mathcal{S}'$. 若 J 为 $p_m(x, \xi)$ 的副特征的连分支, 而不与 $WF(Pu)$ 相交, 则或 $J \subset WF(u)$, 或 $J \cap WF(u) = \emptyset$. 换句话说, 在 $WF(Pu)$ 的余集中, 集 $WF(u)$ 关于沿 Hamilton 组

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt} = -\frac{\partial p_m}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (31)$$

的轨线 $(x(t), \xi(t))$ 的移动是不变的。

在证明前, 先举例说明, 再证明一个引理。

例2 波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$$

在 \mathbb{R}^{n+1} 中不能有具孤立奇点或紧奇点集的解。

事实上, 这里 $m=2$, $p_2(x, \xi) = -\xi_0^2 + |\xi|^2$. 相应方程组(31)有解

$\xi_0 = \xi_j = \text{const.}$, $x_0 = -2\xi_0 t$, $x_j = 2\xi_j t$, $j = 1, \dots, n$.

取解 u 使 $\text{sing supp } u$ 含原点 O , 则存在点 $(0, 0, \xi_0, \xi) \in \text{WF}(u)$, $|\xi_0|^2 = |\xi|^2$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. 据定理 6 知 $(-2\xi_0 t, 2\xi t, \xi_0, \xi)$ 对所有的实 t 属 $\text{WF}(u)$, 特别地, 对一切实 t 有 $(-2\xi_0 t, 2\xi t) \in \text{sing supp } u$, 故 u 无孤立奇点或聚奇点集.

引理 5 设 $u \in \mathcal{D}'(X)$, 则条件 $(x^0, \xi^0) \in \text{WF}(u)$ 等价于:

(A) 存在 $\varepsilon > 0$, 使当 $\lambda(x, \theta)$ 为定义于 $\{|x - x^0| < \varepsilon, \theta \in \mathbf{R}_N \setminus 0\}$ 的光滑实函数, 关于 θ 为正齐一次, 且对某个 $\theta_0 \neq 0$ 有 $\lambda_x(x^0, \theta_0) = \xi^0$ 时, 则对当 $|x - x^0| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 为零的任一经典特征 $a \in$

$CS^0(\{|x - x^0| < \varepsilon\} \times \mathbf{R}_\theta^N)$, 存在 θ_0 在 $\mathbf{R}_N \setminus 0$ 中的锥邻域 F , 使

$$|(u(x), a(x, \theta)e^{-i\lambda(x, \theta)})| \leq C_N |\theta|^{-N},$$

$$\theta \in F, |\theta| \geq 1. \quad (32)$$

证 1) 证条件 (A) 成立. 取 $a(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, 在点 x^0 的某邻域中 $a \equiv 1$, 当 $|x - x^0| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ 时 $a \equiv 0$, 并取 $\lambda(x, \theta) = \sum_{j=1}^n x_j \theta_j$,

故 $N = n$, $\theta_0 = \xi^0$, 于是 $(u(x), a(x)e^{-i\lambda(x, \theta)}) = \widehat{au}(\theta)$, 而在 ξ^0 的某个锥邻域中急降. 由此知 $(x^0, \xi^0) \notin \text{WF}(u)$.

2) 设 $(x^0, \xi^0) \notin \text{WF}(u)$. 不失一般性, 可认为 $u \in \mathcal{D}'(X)$. 取 λ 及 a 如 (A) 中所述. 用 $\widehat{u}(\xi)$ 改写 (32) 的左边

$$\begin{aligned} & (u(x), a(x, \theta)e^{i\lambda(x, \theta)}) \\ &= \iint \widehat{u}(\xi) e^{i(x, \xi) - i\lambda(x, \theta)} a(x, \theta) dx d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

把 (33) 理解为振荡积分. 选 ξ^0 的充分小锥邻域 F , 使 $\widehat{u}(\xi)$ 在其中急降. 由于 $(x^0, \xi^0) \notin \text{WF}(u)$, 这是可能的. 分 (33) 右边的积分为和 $I_1 + I_2$, I_1 对 ξ 的积分域为 F_1 , 而 I_2 则对 ξ 沿余集

$\mathbf{R}_n \setminus \Gamma_1$ 积分。下面对 I_1 及 I_2 分别进行估计。

I_1) 在 I_1 中对 x 分部积分, 并利用公式

$${}^t L e^{-i\lambda} = e^{-i\lambda}, \quad {}^t L = |\lambda_x|^{-2} \sum_{j=1}^n i \lambda_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

${}^t L$ 及 L 的系数关于 θ 是正齐 1 次的。因 $\lambda_x(x^0, \theta_0) = \xi^0 \neq 0$, 有 $|\lambda_x(x, \theta)| \neq 0$, 这里 $|x - x^0| < \varepsilon$, $\theta \in \Gamma$, Γ 是 θ_0 的充分小锥邻域。于是

$$I_1 = \int \int_{\xi \in \Gamma_1} L^1(e^{i(x, \xi)} a(x, \theta) \widehat{u}(\xi) e^{-i\lambda(x, \theta)} dx d\xi.$$

因

$$|L^1(e^{i(x, \xi)} a(x, \theta))| \leq C_2 (1 + |\xi|)^1 (1 + |\theta|)^{-1}, \\ \theta \in \Gamma, |\theta| \geq 1.$$

故由 $\widehat{u}(\xi)$ 在 Γ_1 中的急降性得

$$|I_1| \leq C_2 (1 + |\theta|)^{-1}, \quad \theta \in \Gamma, |\theta| \geq 1. \quad (34)$$

I_2) 为估计 I_2 , 应对 x 把整个因子 $e^{i(x, \xi) - i\lambda(x, \theta)}$ 作分部积分。

选点 θ_0 在 $\mathbf{R}_n \setminus 0$ 中的锥邻域 Γ 充分小, 可认为

$$\xi - \lambda_x(x, \theta) \neq 0, \quad \theta \in \Gamma, \xi \in \mathbf{R}_n \setminus \Gamma_1, |x - x^0| < \varepsilon,$$

故对这种 (x, ξ, θ) 有

$$\text{grad}_x((x, \xi) - \lambda) \neq 0.$$

这就能保证振荡积分的正规化。事实上, 对每个 $C > 0$, 有

$$|\xi - \lambda_x(x, \theta)| \geq C(|\xi| + |\theta|),$$

$$\theta \in \Gamma, \xi \in \mathbf{R}_n \setminus \Gamma, |x - x^0| < \varepsilon.$$

取

$${}^t L = -i |\xi - \lambda_x(x, \theta)|^{-2} \sum_{j=1}^n (\xi_j - \lambda_{x_j}(x, \theta)) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

即有

$$L e^{l((x, \xi) - \lambda)} = e^{l((x, \xi) - \lambda)},$$

故得

$$I_2 = \iint_{\xi \in R_n \setminus P_1} e^{l((x, \xi) - \lambda)} [L^1 a(x, \theta)] \widehat{u}(\xi) dx d\xi. \quad (35)$$

因 $u \in \mathcal{S}'$, 而有估式

$$|\widehat{u}(\xi)| \leq C_1 (1 + |\xi|)^{N_1},$$

C_1 及 N_1 为某二正数, 故对充分大的 l , 积分 (35) 绝对收敛, 且当 $\theta \in F$, $|x - x^0| < \varepsilon$ 时, 可用 $C_q (1 + |\theta|)^{-q}$ 估计它, q 为任意正数. 这个估计与 (34) 结合, 即完成引理的证明.

注 5 由引理 5 的证明可看出, 若点 (x^0, ξ^0) 及函数 a, λ 含某个参数, 且所有条件关于此参数一致成立, 则 (32) 中的 C_l 与参数无关.

定理 6 的证明 1) 先考虑情形 $P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$. 设 $Pu = f$, 且

$(x^0, \xi^0) \notin WF(f)$. 算子 P 的符征 $\sigma_P = \xi_n$ 所对应的过 (x^0, ξ^0) 的副特征取形 $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + t, \xi^0)$, t 是沿副特征的参数. 设 J 是这个副特征的含点 (x^0, ξ^0) 而不与 $WF(f)$ 相交的某连通支. 今证明, 或 $J \subset WF(u)$, 或 $J \cap WF(u) = \emptyset$.

设已给定引理 5 中所述的 $\lambda(x, \theta)$ 及 $a(x, \theta)$. 记

$$\lambda_t(x, \theta) = \lambda(x', x_n - t, \theta), \quad a_t(x, \theta) = a(x', x_n - t, \theta),$$

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, 则 $\text{supp } a_t$ 邻近于点 $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + t, \xi^0)$, 且在此点附近, λ_t 有定义. 显然, 任意选择 λ 及 a , 可认为 λ_t 及 a_t 为在点 $(x_1^0, \dots, x_{n-1}^0, x_n^0 + t, \xi^0)$ 满足 (A) 的任意函数.

因

$$\frac{d}{dt}(u, a_t e^{-i\lambda_t}) = \left(u, \frac{\partial}{\partial t}(a_t e^{-i\lambda_t})\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(u, \left(-\frac{\partial}{\partial x_n} \right) (a_t e^{-t\lambda t}) \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}, a_t e^{-t\lambda t} \right) \\
&= (if, a_t e^{-t\lambda t}) \equiv R(t, \theta),
\end{aligned} \tag{36}$$

故由条件 $J \cap WF(f) = \emptyset$ 及注 4 知, 对 t 一致有

$$|R(t, \theta)| \leq C_N (1 + |\theta|)^{-N}, \quad \theta \in \Gamma, \quad |\theta| \geq 1, \tag{37}$$

其中 Γ 为 θ_0 的充分小锥邻域. 由此得

$$\begin{aligned}
&|(u, a_{t_1} e^{-t_1 \lambda t_1}) - (u, a_{t_2} e^{-t_2 \lambda t_2})| \\
&= \left| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (u, a_t e^{-t \lambda t}) dt \right| \leq |t_1 - t_2| C_N (1 + |\theta|)^{-N}
\end{aligned} \tag{38}$$

故若 $(u, a_t e^{-t \lambda t})$ 对某个 t 关于 θ 在 Γ 中急降, 则对任何固定的 t 也如此. 这正是定理 6 所求结果.

2) 再设 P 为任意的 n 阶经典 Ψ DO, 即 $P \in CL^1$, 但具有的主特征 $p_1(x, \xi)$. 先证 (36) 仍成立. 为此应选择含参数 τ 的函数 λ 及 a , 使

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \tau} [a e^{-t \lambda}] - t P[a e^{-t \lambda}] = O(\langle \theta \rangle^{-N}),$$

$$\langle \theta \rangle = \sqrt{1 + |\theta|^2}. \tag{39}$$

对 τ 一致关于 $\theta \in \Gamma$ 成立, 其中 N 为任意正数, 且当 $\tau = 0$ 时, 在点 (x^0, ξ^0) , 条件 (A) 成立.

急降条件 (39) 引出 λ 的方程 (光程方程)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} - p_1(x, \lambda_x) = 0. \tag{40}$$

对小的 τ 及任意给定的初值 $\lambda|_{\tau=0}$ 存在解 λ . 重要的是: 沿 p_1 的副特征 $(x(\tau), \xi(\tau))$ 应有

$$\lambda_{x_j}(x(\tau), \theta_0, \tau) = -\xi_j(\tau), \quad j = 1, \dots, n. \tag{41}$$

只要它们当 $\tau = 0$ 时成立；而这是我们须假定成立的。事实上，由于

$$\frac{\partial \lambda_{xj}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} p_1 = -\xi_j(\tau), \quad j = 1, \dots, n,$$

故上述结论成立。

由(39)还可对 a 的渐近展式的各齐次部分 a_j 引出方程(传输方程, Transport eq.)

$$\frac{\partial a_1}{\partial \tau} - p_1(x, D)a_1 + q(x, D)a_1 = 0;$$

$$\frac{\partial a_0}{\partial \tau} - p_1(x, D)a_0 + q(x, D)a_0 + R_0 = 0;$$

.....

$$\frac{\partial a_{-N}}{\partial \tau} - p_1(x, D)a_{-N} + q(x, D)a_{-N} + R_{-N} = O(\langle \theta \rangle^{-N}).$$

这里 q 为零阶 ψ DO, 与 λ_x 有关; 而 R_j 则只与 $a_1, a_0, \dots, a_{-j+1}$ 有关。若给定初值 $a_j|_{\tau=0}$, 容易递推地求出 a_j 。但注意 a_j 的 $\text{supp } a_j$ 沿 $p_1(x, \xi)$ 的副特征迁移。

基于上述, 以下的讨论对小的 τ 完全类似于算子 $P = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n}$

的情形。可注意, 限于小的 τ , 并不损害一般性, 因定理 6 只须在局部意义下证明。

3) 最后考虑任意的 m 阶经典 ψ DO。设 Q 为 $1-m$ 阶椭圆型经典的适 ψ DO, 其主特征 $q(x, \xi)$ 。记 $P_1 = PQ$, 则 P_1 为一阶经典 ψ DO, 其主特征 $p_1(x, \xi) = p_m(x, \xi)q(x, \xi)$ 。据推论 4, 在定理 6 中只须考虑零副特征。但由关系式

$$\begin{aligned} (p_1)_\xi &= (p_m)_\xi q + p_m q_\xi = (p_m)_\xi q, \\ (p_1)_x &= (p_m)_x q + p_m q_x = (p_m)_x q, \end{aligned} \quad (\text{当 } p_m = 0)$$

故函数 p_1 及 p_m 的零和特征具相差一个公因子。应用推论 5，知定理 6 对 P 的结论可用对 P_1 的结论推出。定理 6 证毕。

本章主要参考文献

1. L. Hörmander, Acta Math., 127 (1971) 79-183.
2. М. А. Шудин, *Псевдодифференциальные Операторы*, Наука, Москва, 1978, Гл. 1.

进一步的参考文献

1. J. J. Duistermaat, L. Hörmander, Acta Math., 128 (1972) 183-269.
2. R. Beals, Duke Math. J., 42 (1975) 1-42.
3. L. Boutet de Monvel, *A Course on Pseudo-differential Operators and their Applications*, Duke Univ., Math. Series II, 1976.
4. H. O. Cordes, *Elliptic Pseudo-differential Operators—An abstract theory*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, No. 756, 1979.
5. H. Kumano-go, M. Nage, Funkts. Ekvac., 21 (1978) 151-192.
6. M. Taylor, *Pseudo-differential Operators*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, No. 416, 1974; II, Princeton Univ. Press.
7. F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, 1, 2. Plenum Press, New York, 1980.